

J'apprends mon cours sur la dispersion et l'absorption

1. Un vecteur d'onde s'écrit de la forme $\underline{k} = -i\alpha$. Que peut-on en déduire?

$\text{Re}(\underline{k}) = 0 \Rightarrow$ pas de propagation) c'est une O.S. amortie, cela s'appelle aussi une onde évanescente
 $\text{Im}(\underline{k}) \neq 0 \Rightarrow$ absorption

2. Le champ électrique d'une onde s'écrit $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx)$. Commenter cette expression et définir une distance caractéristique.

Le terme de phase $\omega t - kx$ montre qu'il y a propagation selon (+ ou -) x .
 Le terme $E_0 e^{-\alpha x}$ représente l'amplitude de l'onde, elle diminue quand l'onde se propage; il y a absorption. Le terme $e^{-\alpha x}$ est de la forme $e^{-x/\delta}$ on définit la distance caractéristique $\delta = \frac{1}{\alpha}$. Pour $x = 5\delta$, l'amplitude de l'onde est nulle.

3. Un vecteur d'onde s'écrit sous la forme $\underline{k} = k' - ik''$. Que peut-on en déduire?

$\text{Re}(\underline{k}) = k' \neq 0 \Rightarrow$ propagation
 $\text{Im}(\underline{k}) = -k'' \neq 0 \Rightarrow$ absorption

4. Le champ magnétique d'une onde s'écrit $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\beta y} \cos(\omega t)$. Commenter cette expression et définir une distance caractéristique.

y et t ne sont pas dans le même terme donc l'onde ne se propage pas: c'est une O.S.
 Le terme $B_0 e^{-\beta y}$ diminue quand y augmente, l'onde est amortie ou absorbée.
 Le terme $e^{-\beta y}$ est de la forme $e^{-y/\delta}$ avec $\delta = 1/\beta$. Pour $y = 5\delta$, l'onde a été totalement absorbée.

5. Qu'est-ce qu'un paquet d'ondes?

C'est la superposition d'ondes de fréquences différentes.

De quoi est composé un paquet d'ondes?

Il est composé d'une enveloppe et d'oscillations à l'intérieur de celle-ci.

Quelle est l'expression de la vitesse de groupe? que représente-t-elle?

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$ pour le réel ou $v_g = \frac{d\omega}{d(\text{Re}(\underline{k}))}$ pour le complexe: c'est la vitesse de propagation de l'enveloppe soit la vitesse de propagation de l'énergie.

Quelle est l'expression de la vitesse de phase? que représente-t-elle?

$v_p = \frac{\omega}{k}$ pour le réel ou $v_p = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})}$ pour le complexe: c'est la vitesse de propagation des oscillations.

Que peut-on en déduire lorsque la vitesse de phase dépend de la pulsation?

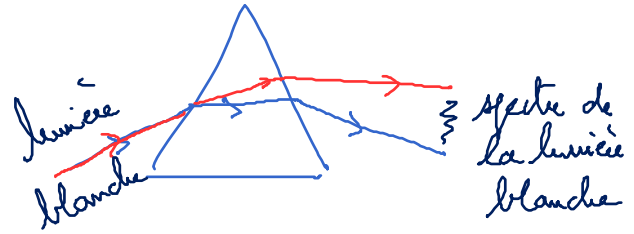
v_p dépend de ω ; il y a dispersion.

Que peut-on en déduire lorsque les vitesses de phase et de groupe sont différentes?

$v_p \neq v_g$; il y a dispersion.

Définir la notion de dispersion et l'illustrer sur un exemple.

Il y a dispersion lorsque les ondes de $f \neq$ ne vont pas à la même vitesse. C'est le cas du verre (loi de Cauchy: n dépend de λ)



6. Montrer que pour une particule chargée dans un champ électromagnétique, la force magnétique est négligeable devant la force électrique.

$$\frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{\|q \vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|q \vec{E}\|} = \frac{q v B}{q E} = \frac{v}{c} \ll 1$$

pour une onde:
 $BC = E$

v : vitesse des charges
 c : vitesse de la lumière

7. Un plasma est constitué d'électrons de masse m , de charge $-e$, de vitesse $\vec{v}$ et de densité volumique n^* , soumis à l'action du champ électrique d'une onde de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$. On néglige le poids de ces électrons. Déterminer la conductivité électrique $\underline{\gamma}$ de ce plasma.

RFD appliqué à l'électron : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - e \vec{v} \wedge \vec{B} + m \vec{g}$

négligeable

en notation complexe : $m i \omega \vec{v} = -e \vec{E}$

d'où $\vec{v} = \frac{-e}{m i \omega} \vec{E}$ et $\vec{j} = n^* (-e) \vec{v} = \frac{n^* e^2}{m i \omega} \vec{E}$

par identification avec la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$ on a $\boxed{\underline{\gamma} = \frac{n^* e^2}{m i \omega}}$

8. Soit une onde de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k} z)}$ avec $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$ où δ est une constante positive. Commenter l'expression de $\underline{k}$ et en déduire le champ électrique en notation réelle.

$\text{Re}(\underline{k}) = \frac{1}{\delta} \Rightarrow$ il y a propagation

$\text{Im}(\underline{k}) = -\frac{1}{\delta} \Rightarrow$ il y a absorption

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (\frac{1-i}{\delta}) z)} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - z/\delta)} e^{-z/\delta}$

$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}) = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)$

l'amplitude de l'onde ↓

quand $z \uparrow$ soit quand

l'onde se propage

l'onde se propage
selon $+Oz$

9. Soit une onde de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}y)}$ avec $\underline{k} = -i\alpha$ où α est une constante positive. Commenter l'expression de $\underline{k}$ et en déduire le champ électrique en notation réelle.

$\text{Re}(\underline{k}) = 0 \Rightarrow$ pas de propagation

$\text{Im}(\underline{k}) = -\alpha \Rightarrow$ absorption

$$\underline{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - (-i\alpha y))} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} e^{-\alpha y}$$

$$\vec{E} = \text{Re}(\underline{E}) = \vec{E}_0 e^{-\alpha y} \cos(\omega t)$$

x et y sont dans deux termes $\neq$:
c'est une O.S.

l'amplitude de l'onde $\downarrow$ quand $y \uparrow$
absorption :

10. Un plasma est constitué d'électrons de masse m , de charge $-e$, de vitesse $\vec{v}$ et de densité volumique n^* , soumis à l'action du champ électrique d'une onde de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$ et à une force liée aux collisions de la forme $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$. On néglige le poids de ces électrons. Déterminer la conductivité électrique γ de ce plasma.

RFD appliquée à 1 électron : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B} + m\vec{g} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$

en notation complexe : $i\omega m \underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - m \frac{\underline{\vec{v}}}{\tau}$

$$\underline{\vec{v}} \left(\frac{m}{\tau} + i\omega m \right) = -e\underline{\vec{E}} \quad \text{soit} \quad \underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m} \frac{\underline{\vec{E}}}{1 + i\omega\tau}$$

d'où $\underline{\vec{f}} = n^* (-e) \underline{\vec{v}} = \frac{n^* e^2 \tau}{m} \frac{\underline{\vec{E}}}{1 + i\omega\tau}$

en identifiant avec la loi d'Ohm on a :
 $\underline{\vec{f}} = \gamma \underline{\vec{E}}$ donc $\boxed{\gamma = \frac{n^* e^2 \tau}{m(1 + i\omega\tau)}}$

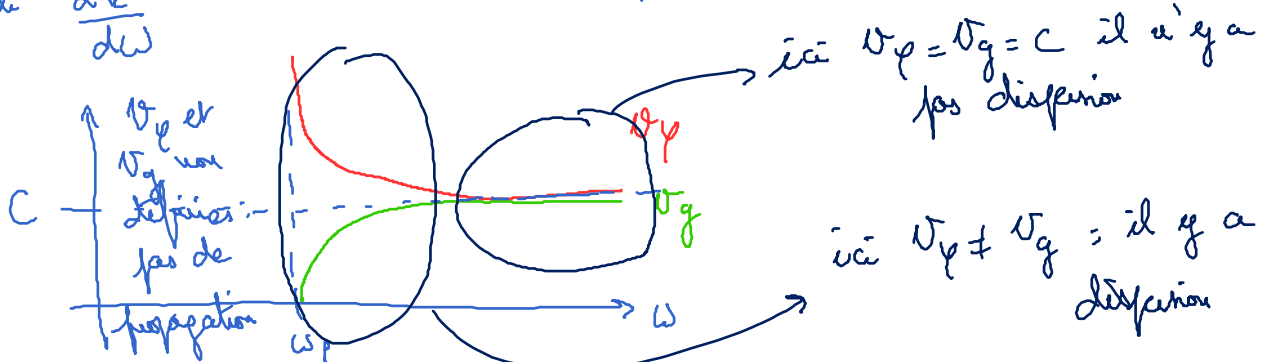
11. On donne $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. Que se passe-t-il pour $\omega < \omega_p$? pour $\omega > \omega_p$? Dans le cas où la propagation est possible, exprimer les vitesses de phase et de groupe en fonction de ω , c et ω_p . Tracer v_ϕ et v_g en fonction de ω . Commenter.

pour $\omega < \omega_p$: $\underline{k}^2 < 0$ donc $\underline{k}$ imaginaire pur : il y a absorption sans propagation

pour $\omega > \omega_p$: $\underline{k}^2 > 0$ donc $\underline{k}$ réel : il y a propagation sans absorption

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \quad v_\phi = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} \quad \text{avec} \quad \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2}} \quad v_g = c \sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2}$$



12. Ecrire les équations de Maxwell dans un métal de conductivité γ où la densité volumique de courants est nulle et où le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction. En déduire l'équation de propagation du champ électrique puis la relation de dispersion pour une onde de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$. Commenter l'expression de $\underline{k}$.

$$\text{N.G.} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

$$\text{N.T.} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{N.F.} \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{N.A.} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \mu_0 \gamma \vec{E}$$

Courant de déplacement négligé

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$$\text{donc} \quad - \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{B}) = - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = - \Delta \vec{E} \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \text{eq. de diffusion}$$

On remplace l'expression de $\vec{E}$ dans cette équation:

$$- \underline{k}^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma i \omega \vec{E} \quad \text{soit} \quad \underline{k}^2 = -i \mu_0 \gamma \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma \omega$$

$$\text{d'où} \quad \underline{k} = e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega}$$

$\text{Re}(\underline{k}) \neq 0$: il y a propagation
 $\text{Im}(\underline{k}) \neq 0$: il y a absorption

13. Soit un plasma de conductivité $\underline{\gamma}$ imaginaire de la forme $\underline{\gamma} = i\omega\alpha$ où α est une constante positive. Le plasma est localement électriquement neutre. Ecrire les équations de Maxwell en déduire l'équation de propagation du champ électrique puis la relation de dispersion pour une onde de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{z})}$. Commenter l'expression de $\underline{k}$.

$$\text{N.G.} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = 0 \quad (\text{électriquement neutre})$$

$$\text{N.T.} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{N.F.} \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{N.A.} \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$$- \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{B}) = - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = - \Delta \vec{E}$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0}$$

pour $\underline{\gamma} = 0$, on retrouve l'éq. de propagation sous la forme de l'éq. de d'Alembert

In rotation complexe: $-\underline{k}^2 \underline{\hat{E}} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2) \underline{\hat{E}} - \mu_0 \gamma (i\omega \underline{\hat{E}}) = \underline{0}$

soit $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \gamma i\omega = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \alpha$

si $\omega > \sqrt{\mu_0 \alpha c^2}$: $k^2 > 0$ donc k réel : il y a propagation sans absorption

si $\omega < \sqrt{\mu_0 \alpha c^2}$: $k^2 < 0$ donc k imaginaire pure : il y a absorption sans propagation