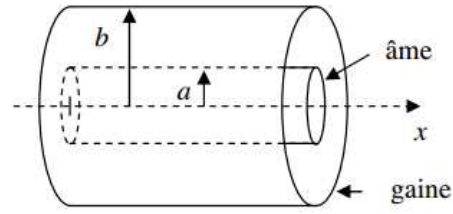


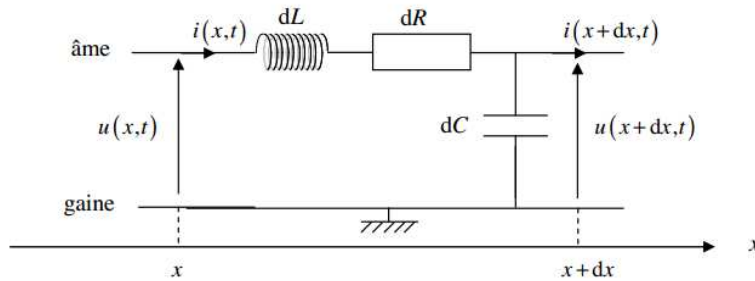
Exercices sur les ondes électromagnétiques

I. Propagation dans un câble coaxial

Un câble coaxial est constitué d'un fil de cuivre cylindrique central, de rayon a , appelé âme, et d'un conducteur cylindrique creux de même axe de révolution, également en cuivre, appelé gaine et de rayon intérieur b . Un isolant occupe tout l'espace entre l'âme et la gaine. A l'entrée du câble coaxial, on place un générateur de tension, non représenté, entre l'âme et la gaine.



On modélise le câble coaxial, milieu continu, par une ligne électrique à constantes réparties, pour laquelle on note respectivement Λ , Γ et r les inductance, capacité et résistance par unité de longueur. La ligne est modélisée par une succession de tronçons élémentaires de longueur dx , considérés comme des quadripôles élémentaires auxquels sont associées une inductance $dL = \Lambda dx$, une capacité $dC = \Gamma dx$ et une résistance $dR = r dx$. Le schéma électrique d'un tronçon de ligne de longueur dx est représenté ci-dessous. Les tensions et courants sont des signaux sinusoïdaux alternatifs de fréquence f .



1. Montrer que l'équation de propagation de l'onde de tension $u(x, t)$ est: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r \Lambda \frac{\partial u}{\partial t}$
2. En considérant une solution de la forme $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ à l'équation précédente, trouver l'équation de dispersion associée à la ligne.
3. On écrit $\underline{k}$ sous la forme $\underline{k} = \alpha - j\beta$. Que représentent physiquement α et β ? Exprimer $u(x, t)$ en notation réelle et en déduire le signe de β pour $\alpha > 0$.
4. On se place dans le cas où $r \ll \Gamma\omega$. A l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, exprimer α et β en fonction de r , Λ , Γ et ω .
5. Question supplémentaire: On définit l'atténuation linéique de puissance du signal entre le point d'entrée du câble coaxial en $x = 0$ et un point d'abscisse x par la grandeur A , exprimée en décibel par unité de longueur: $A = \frac{10 \ln(\frac{P_0}{P(x)})}{x \ln 10}$

avec $P(x) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{u}(x, t) \underline{i}^*(x, t))$ la puissance moyenne de l'onde à l'abscisse x et $P(x = 0) = P_0 = \frac{u_0 i_0}{2}$ la puissance moyenne de l'onde à l'abscisse $x = 0$.

En considérant que $\underline{i}(x, t) = i_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ et $\underline{u}(x, t) = u_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$. Exprimer A en fonction de β .

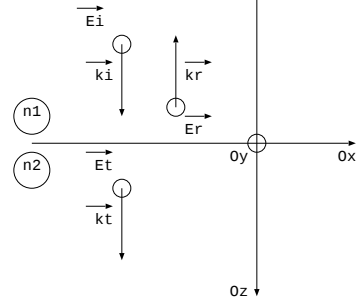
Dans le cas où $r \ll \Gamma\omega$, montrer que $A = \frac{10r}{\ln 10} \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

Réponses: 2- $\underline{k}^2 = \Lambda \Gamma \omega^2 - j\omega \Gamma$ 3- $\beta > 0$ 4- $\alpha = \sqrt{\Lambda \Gamma} \omega$ et $\beta = \frac{r}{2\omega} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$ 5- $A = \frac{20\beta}{\ln 10}$

II. Réflexion et transmission à l'interface entre deux diélectriques

1. On étudie la propagation d'une OPPH de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$ dans le vide. Dédurre des équations de Maxwell la structure de l'onde électromagnétique.

Soit un dioptre confondu avec le plan Oxy séparant les milieux d'indice n_1 pour $z < 0$ et d'indice n_2 pour $z > 0$. Une onde em incidente se propage selon $+Oz$ (le champ électrique est polarisé rectilignement selon Oy), elle donne naissance à une onde transmise et à une onde réfléchie. Les ondes ont la même pulsation ω . Dans toute la suite on travaille en **notation réelle**.



Dans un milieu d'indice n , la relation de dispersion s'écrit $k = \frac{n\omega}{c}$. La structure du champ électromagnétique est identique à celle dans le vide.

2. Ajouter sur les schémas les champs magnétiques.

3. Exprimer les vecteurs d'onde. On note E_0 l'amplitude de l'onde incidente et on note les coefficients de réflexion et de transmission: $r = \frac{E_{0r}(z=0)}{E_{0i}(z=0)}$ et $\tau = \frac{E_{0t}(z=0)}{E_{0i}(z=0)}$. Exprimer les champs électrique et magnétique en fonction des données.

4. On admet que le champ électromagnétique est continu à la traversée du dioptre. En déduire les expressions de r et τ en fonction de n_1 et n_2 .

5. Exprimer les coefficients de transmission et de réflexion en énergie définis par $T = \frac{\langle ||\vec{R}_t|| \rangle}{\langle ||\vec{R}_i|| \rangle}$ et $R =$

$\frac{\langle ||\vec{R}_r|| \rangle}{\langle ||\vec{R}_i|| \rangle}$. Quelle relation lie R et T ? Que traduit cette relation?

6. AN : calculer r , τ , R et T pour $n_1 = 1$ et $n_2 = 1,5$ et pour $n_1 = 1,5$ et $n_2 = 1$.

Réponses: 4- $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$ 5- $R = (\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2})^2$ et $T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$, $R + T = 1$

III. Four micro-ondes

Un four à micro-ondes est une cavité parallélépipédique dans laquelle règne un champ électromagnétique créé par un magnétron. La distribution de ce champ dans la cavité est inhomogène, cet exercice se propose de réaliser une cartographie sommaire du champ en 2D au niveau du plateau. Le détecteur de champ est constitué de fins copeaux de chocolat uniformément répartis sur la plaque inférieure, le plateau tournant ayant été ôté.

On cherche le champ sous la forme:

$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi y}{b}) \cos(\omega t)$ où a et b sont respectivement la largeur et la profondeur de la plaque inférieure $a = 30 \text{ cm}$ et $b = 15 \text{ cm}$.

1. Commenter la forme de ce champ. Le champ électrique est nul sur les bords de la plaque. Que peut-on en déduire sur les nombres n et m ?

2. Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ $\vec{E}$ dans la cavité (assimilée à du vide)? En déduire la relation que doivent satisfaire ω , n et m .

3. Dédurre du cliché donnant les zones où le chocolat a fondu, la valeur numérique de la fréquence du magnétron.

Réponse: 2- $\frac{\omega}{c} = \sqrt{(\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2}$

