

# CCB de physique

(durée 4 heures avec calculatrice)

Le sujet comprend trois problèmes indépendants.

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## RAPPEL DES CONSIGNES

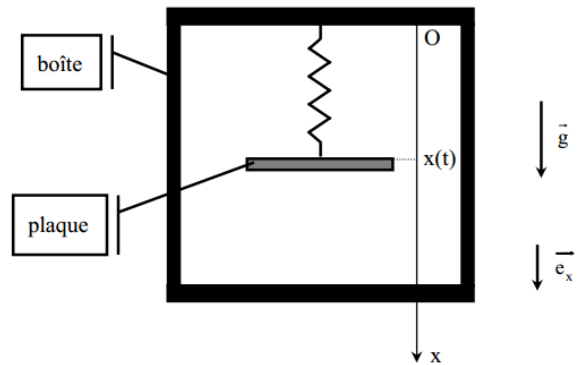
- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition, d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

## I. Problème I : Stabilisateur d'images

Un des problèmes récurrents et que connaissent tous les photographes, professionnels ou amateurs, est le bougé qui se produit lorsqu'une photographie est prise alors que le photographe est en mouvement. Le résultat est une image floue. Une des possibilités pour éviter ce phénomène consiste à augmenter la vitesse (diminuer la durée d'exposition) ce qui n'est pas toujours possible. Le premier système stabilisateur d'image a été inventé par Garrett Brown en 1972 et ne s'appliquait qu'aux caméras. Il était donc destiné aux professionnels du cinéma. À partir des années 2000, différents systèmes furent adaptés aux appareils photos. Cette partie s'intéresse au fonctionnement d'un appareil capable de mesurer les mouvements que le photographe communique (volontairement ou non) au boîtier de l'appareil photo lors d'une prise de vue.

On considère un oscillateur mécanique constitué d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  dont l'extrémité supérieure est fixée sur la face supérieure horizontale d'une boîte. À l'extrémité inférieure du ressort est accrochée une plaque de masse  $m$ .

Ce système peut constituer un accéléromètre. Il pourra donc mesurer les accélérations de la boîte (qui modélise un appareil photo par exemple). On négligera d'éventuels mouvements autres que celui de translation verticale. On supposera le référentiel terrestre galiléen et on note  $g$  la norme de l'accélération de la pesanteur.



1. En supposant que la boîte et la plaque sont immobiles, exprimer la longueur  $x_{eq}$  position d'équilibre dans ces conditions, en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $k$  et  $l_0$ .

Par la suite, on étudie le mouvement de la plaque par rapport à la boîte dans le cas où celle-ci est elle-même en mouvement par rapport au référentiel terrestre. On note  $\vec{a} = a(t)\vec{e}_x$  l'accélération de la boîte par rapport au sol (lié au référentiel terrestre). On note alors  $x(t)$  la position instantanée de la plaque comptée par rapport à  $O$ , dans le référentiel lié à la boîte. Au cours de son mouvement dans la boîte, la plaque est soumise également à des frottements visqueux, modélisables par une force  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse de la plaque par rapport à la boîte et  $\alpha$  un coefficient strictement positif.

2. La boîte constitue-t-elle un référentiel galiléen ?

3. Écrire la deuxième loi de Newton appliquée à la masse dans le référentiel de la boîte et montrer que  $x(t)$  obéit à une équation différentielle du type:

$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$  où  $f(t)$  est une fonction du temps. Exprimer  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction de  $m$ ,  $k$  et  $\alpha$ , puis exprimer  $f(t)$  en fonction de  $\omega_0$ ,  $x_{eq}$  et  $a(t)$ .

On considère que la boîte est soumise à une accélération sinusoïdale  $a(t) = A_m \cos(\omega t)$  d'amplitude  $A_m$ , de pulsation  $\omega$  et de fréquence  $f$ .

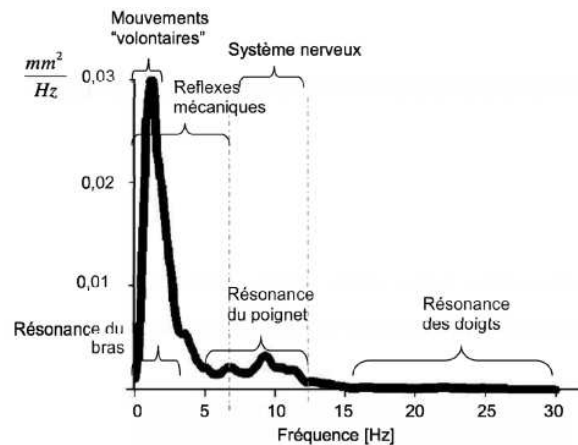
On admet avoir atteint le régime sinusoïdal forcé et que le déplacement par rapport à la position d'équilibre est de la forme  $X(t) = x(t) - x_{eq}$ . On se place notation complexe où  $\underline{a}(t) = A_m e^{i\omega t}$  et  $\underline{X}(t) = \underline{X}_m e^{i\omega t}$  avec

$$\underline{X}_m = X_m e^{i\phi}.$$

4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\underline{X}(t)$  et en déduire l'expression de  $\underline{X}_m$  en passant en notation complexe. Montrer que  $\underline{X}_m = \frac{-A_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega\omega_0}{Q}}$ .

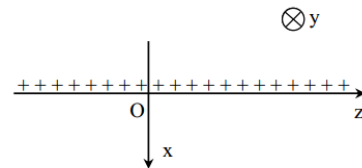
5. On cherche le domaine de fréquences dans lequel  $X(t)$  est proportionnelle à  $a(t)$ . Exprimer  $X_m$  et  $\phi$  à basse fréquence et vérifier que la condition recherchée est valable à basse fréquence.

6. Le document ci-contre est une synthèse de l'analyse spectrale du tremblement de la main (pour un être humain) ainsi que de ses origines. Il représente la répartition fréquentielle de l'amplitude des mouvements. L'unité de l'axe des ordonnées n'a pas d'importance pour la compréhension du graphique. Pour un accéléromètre fonctionnant selon le principe décrit précédemment, on suppose que  $Q = 5$  et  $\omega_0 = 5.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ . À l'aide de ces valeurs et du document, indiquer si la condition évoquée dans la question précédente est remplie pour cet accéléromètre.



Comme la réponse obtenue montre qu'il est possible de mesurer l'accélération de la boîte en mesurant directement le mouvement  $X(t)$  de la plaque, on se propose d'effectuer cette mesure par une méthode électrostatique.

7. On considère un plan infini (assimilé au plan  $yOz$ ) uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique positive de charges notée  $\sigma$ . On cherche à déterminer le champ électrostatique engendré par ce plan dans tout l'espace.



7.a. Déterminer le sens et la direction du champ électrostatique en un point  $M$  de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . De quelle variable  $x, y$  ou  $z$  peut dépendre ce champ?

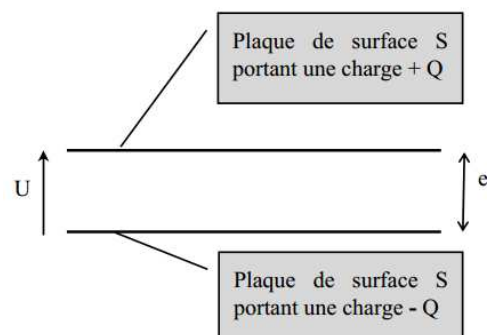
7.b. En utilisant le théorème de Gauss, donner l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  en fonction de  $\sigma, \epsilon_0$  et d'un vecteur unitaire à préciser.

8. On modélise à présent un condensateur par deux plans infinis uniformément chargés: le plan  $A$  d'équation  $x = 0$  porte une densité surfacique de charges  $+\sigma$  et le plan  $B$  d'équation  $x = e$  porte une densité surfacique de charge  $-\sigma$ ,  $\sigma$  et  $e$  étant des constantes positives.

8.a. À partir du résultat de la question 7b, déterminer l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  qui existe entre les plaques en fonction de  $\sigma, \epsilon_0$ . Que peut-on dire du champ électrostatique à l'extérieur des plaques?

8.b. Établir l'expression de la différence de potentiel  $U_{AB} = V_A - V_B$  en fonction de  $\sigma, \epsilon_0$  et  $e$ .

9. On considère à présent un condensateur réel, constitué de deux plaques identiques de surface  $S$  placées parallèlement l'une à l'autre et séparées par une distance  $e$ . Elles portent des charges égales en valeur absolue et opposées en signe. La différence de potentiel entre ces plaques est notée  $U$ . La distance  $e$  étant faible au regard de la taille des plaques, on peut supposer que le champ électrostatique entre les plaques est le même que celui engendré par deux plans infinis portant des densités surfaciques de charges équivalentes.



Définir la capacité  $C$  de ce condensateur. Donner son expression en fonction de  $S$ ,  $e$  et  $\epsilon_0$ .

On envisage d'utiliser les résultats précédents pour mesurer une accélération. On réalise donc un système tel que la plaque définie au début du problème, soit une armature mobile d'un condensateur, l'autre armature étant fixe par rapport au boîtier. On mesure la position de l'armature mobile par la grandeur  $x(t)$ . Quand  $x(t) = x_{eq}$ , la distance entre les deux armatures est  $e$ . L'armature fixe porte une charge  $+Q$  et l'autre armature porte une charge  $-Q$ . On note  $U$  la différence de potentiel entre les armatures.

10. Établir l'expression de la tension  $U$  en fonction de  $Q$ ,  $S$ ,  $e$ ,  $X(t) = x(t) - x_{eq}$  et  $\epsilon_0$ . En déduire que la mesure de  $U$  permet d'avoir accès à l'accélération  $a(t)$  que subit le boîtier par rapport au sol.

## II. Problème II: physique et médecine

Ce problème aborde différents aspects physiques en lien avec la médecine. On s'intéressera à la chirurgie réfractive et à la description du système vasculaire. Aucune connaissance particulière concernant les dispositifs mentionnés précédemment n'est demandée.

### Partie I - Quelques aspects liés à la chirurgie réfractive

#### Chirurgie LASIK

Le LASIK (acronyme de Laser Assisted In-Situ Keratomileusis) est une technique de chirurgie réfractive couramment utilisée depuis le début des années 2000. En 1993, Detao Du, chercheur à l'université du Michigan, reçoit par accident un faisceau laser femtoseconde dans l'oeil. Les médecins qui l'examinent sont surpris par la netteté de l'impact du laser. Ils constatent que les impulsions laser ultra-courtes permettent de limiter la brûlure des tissus à une zone très restreinte, contrairement aux impulsions lasers utilisées à l'époque en ophtalmologie. Cet événement fortuit a contribué à initier le développement de la chirurgie oculaire au laser.

Du point de vue pratique, une intervention chirurgicale LASIK se déroule en trois étapes:

- Une lamelle d'épaisseur d'environ  $100 \mu m$  est découpée avec un laser à impulsions femtosecondes. Une partie de la lamelle reste attachée à la cornée. La découpe de ce volet cornéen dure environ dix secondes par oeil. Ce dernier peut être soulevé de façon à accéder à la partie non superficielle de la cornée, le stroma.
- La forme de la cornée est ensuite remodelée avec un autre type de laser, le laser Excimer. La durée de cette phase est inférieure à la minute.
- Pour finir, le volet cornéen est remis en place. L'intervention, pour les deux yeux, dure typiquement une trentaine de minutes au bloc opératoire. La cicatrisation s'effectue en quelques heures. La durée des impulsions est de quelques femtosecondes. Le diamètre de la zone de focalisation du faisceau au niveau de l'impact, à savoir le diamètre du faisceau laser, est d'environ  $d = 1 \mu m$ .

On étudie tout d'abord l'onde électromagnétique produite par le laser. On propose de modéliser l'onde électromagnétique en un point  $M$  de l'espace à un instant  $t$  par une onde plane progressive sinusoïdale. Un point  $M$  de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . On note  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  les vecteurs unitaires portés par les axes du repère cartésien. L'onde est supposée se propager selon la direction  $\vec{e}_x$  et être polarisée suivant la direction  $\vec{e}_y$ . On note  $E_0$  l'amplitude du champ électrique,  $\omega$  sa pulsation et  $k$  son vecteur d'onde. On note  $c$  la célérité des ondes dans le vide.

1. Écrire les expressions des champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$ , ainsi que du vecteur de Poynting  $\vec{R}(M, t)$ . On donnera les expressions en fonction, notamment, de  $E_0$ ,  $c$ ,  $\omega$ ,  $k$  et  $\epsilon_0$ .

On s'intéresse maintenant aux interactions entre le faisceau laser et les tissus constitutifs de l'oeil. L'utilisation d'impulsions très courtes de durée  $\tau$  et la forte focalisation du faisceau laser, de diamètre  $d$ , permettent de produire des champs électriques intenses. Dans ces conditions, le laser provoque la vaporisation de la matière. Une cavité est alors formée dans le stroma cornéen. Le champ électrique de l'impulsion laser est suffisamment intense pour ioniser la matière et la transformer en plasma. Ce mécanisme est appelé claquage optique. La bulle de gaz produite génère des contraintes dans la cornée qui provoquent une rupture localisée du tissu. La production de centaines de milliers de bulles permet de réaliser une incision nette pour former le volet cornéen.

2. Exprimer l'énergie  $E_{imp}$  d'une impulsion laser en fonction de  $E_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $c$ ,  $\tau$  (durée d'une impulsion laser) et  $d$  (diamètre du faisceau laser).

3. Quelle est l'expression du champ électrique créé par le noyau d'un atome d'hydrogène sur son électron? On notera  $r_H$  le rayon de l'orbite de l'électron.

4. Comparer les valeurs des champs électriques perçus par un électron. Les valeurs numériques de l'énergie et de la durée caractérisant l'impulsion laser sont données en annexe.

On étudie la propagation du laser dans la bulle de plasma formée dans la cornée. On note  $n$  la densité d'électrons libres du plasma et  $m_e$  la masse d'un électron. On utilisera le modèle du plasma dilué. On fait les hypothèses suivantes: on néglige les interactions entre les particules, les ions sont supposés immobiles et le plasma est localement neutre

On considérera une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale de la forme  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ .

5. Montrer que la composante magnétique de la force de Lorentz est négligeable devant la composante électrique.

6. Montrer que le vecteur densité de courant vérifie en notation complexe la relation  $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$ . Quel nom porte cette loi? Exprimer  $\underline{\gamma}$  en fonction de  $m_e$ ,  $\omega$ ,  $n$  et de la charge élémentaire  $e$ .

7. Écrire les équations de Maxwell dans le plasma en précisant leurs noms.

8. À partir des équations de Maxwell, établir l'équation de propagation du champ électrique et en déduire la relation de dispersion sous la forme  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ . On donne  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ . Exprimer  $\omega_p$  en fonction de  $n$ ,  $e$ ,  $m_e$  et  $\epsilon_0$ .

9. Montrer que l'onde ne peut pas se propager dans le plasma si la pulsation est inférieure à  $\omega_p$ . Quelle est l'expression du champ électrique en notation réelle dans ce cas? On introduira la distance  $\delta$  définie par  $\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$ .

On se propose de déterminer la taille de la zone susceptible d'être vaporisée par une impulsion du laser femtoseconde. On fait l'hypothèse que le claquage optique dans un volume sphérique de rayon  $R$  du stroma cornéen conduit à la formation de gaz. On supposera que la cornée est constituée d'eau et que le gaz formé est un mélange de  $H_2$  et  $O_2$ .

10. (Question qui demande de l'initiative) Déterminer la valeur de  $R$ , rayon de la zone supposée sphérique de la cornée vaporisée par une impulsion laser.

11. (Question qui demande de l'initiative) Donner une estimation de la surface du volet cornéen à découper sachant que l'on estime le diamètre cornéen à  $d_c = 9,0 \text{ mm}$ . Quelle est le nombre d'impulsions nécessaires pour effectuer cette découpe? En prenant une durée de découpe de 10 secondes pour un oeil, donner une estimation de la fréquence des impulsions du laser utilisé.

## Mesure de l'épaisseur de la cornée

Il existe certaines contre-indications au LASIK. L'épaisseur de la cornée du patient doit par exemple être supérieure à  $500 \mu\text{m}$ . La mesure de l'épaisseur de la cornée, ou pachymétrie, peut s'effectuer à l'aide d'ondes ultrasonores. On considère la propagation d'une onde plane progressive sinusoïdale ultrasonore dans la cornée. Celle-ci sera considérée comme un fluide sans viscosité de masse volumique  $\rho_0$ , de pression  $P_0$  et de vitesse nulle. L'onde se propage le long de l'axe  $Ox$  (de vecteur unitaire  $\vec{e}_x$ ) dans le sens des  $x$  positifs avec une célérité  $c$ . Lors du passage de l'onde, on notera la pression  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$ , la masse volumique  $\rho(x, t) = \rho_0 + \mu(x, t)$  et la vitesse du fluide  $\vec{v}(x, t) = v(x, t)\vec{e}_x$ .

On note  $\chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$  le coefficient de compressibilité adiabatique du fluide.

On définit l'impédance acoustique  $Z$  comme le rapport de la surpression sur la vitesse. On notera  $Z_1$  l'impédance acoustique de la cornée et  $Z_2$  celle de l'humeur aqueuse, liquide intra-oculaire de la partie antérieure de l'oeil.

12. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique. Préciser en quoi consiste cette approximation. Donner l'expression du coefficient de compressibilité adiabatique dans le cadre de l'approximation acoustique.

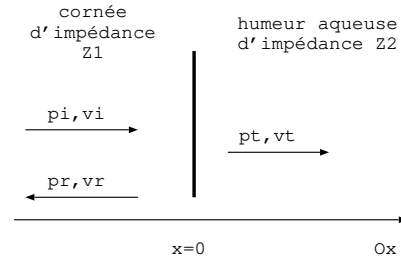
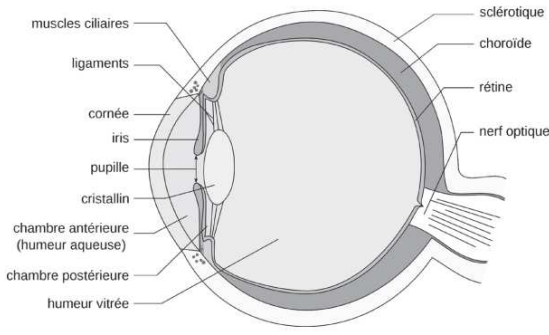
13. Écrire l'équation d'Euler et simplifier son expression dans le cadre de l'approximation acoustique en négligeant le poids.

14. Écrire l'équation locale de conservation de la masse et simplifier son expression dans le cadre de l'approximation acoustique.

15. En déduire l'équation de propagation vérifiée par  $p(x, t)$  en fonction de  $\rho_0$  et  $\chi_S$ . Donner l'expression de la célérité des ondes sonores. Donner sa valeur numérique dans le cas de la cornée.

16. Donner l'expression de l'impédance acoustique dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des  $x$

positifs, puis dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des  $x$  négatifs.



On modélise l'interface cornée-humeur aqueuse par un dioptré plan placé en  $x = 0$ .

Soit une onde incidente dans la cornée de surpression  $p_i(x, t)$  et de vitesse particulière  $v_i(x, t)$ , qui donne naissance sur l'interface à une onde réfléchiée de surpression  $p_r(x, t)$  et de vitesse particulière  $v_r(x, t)$  et une onde transmise de surpression  $p_t(x, t)$  et de vitesse particulière  $v_t(x, t)$ . On note  $Z_1$  l'impédance de la cornée et  $Z_2$  l'impédance de l'humeur aqueuse.

On note  $r = \frac{v_r(x=0, t)}{v_i(x=0, t)}$  et  $\tau = \frac{v_t(x=0, t)}{v_i(x=0, t)}$ , les coefficients de réflexion et de transmission en vitesse particulière sur le dioptré.

**17.** Exprimer  $p_i(x, t)$  en fonction de  $v_i(x, t)$ ,  $p_r(x, t)$  en fonction de  $v_r(x, t)$  et  $p_t(x, t)$  en fonction de  $v_t(x, t)$  et des impédances.

**18.** Expliciter les conditions aux limites à l'interface entre la cornée et l'humeur aqueuse. En déduire les expressions des coefficients de transmission et de réflexion en vitesse en fonction des impédances  $Z_1$  et  $Z_2$ . Montrer que  $r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ .

**19.** On définit l'intensité acoustique par  $I(x) = \langle p(x, t)v(x, t) \rangle$ . Exprimer en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ , le coefficient de réflexion en intensité définie par  $R = \frac{|I_r(x=0, t)|}{I_i(x, t)}$ .

**20.** On suppose le coefficient  $R$  proche de 1, soit l'onde réfléchiée existe bien. Expliquer comment obtenir la valeur de l'épaisseur de la cornée à l'aide de ce dispositif.

## Partie II - Quelques aspects relatifs au système vasculaire

Le coeur est l'organe permettant la circulation du sang dans l'organisme. On s'intéresse en particulier aux contractions du ventricule gauche, qui expulsent le sang oxygéné vers l'aorte pour irriguer ensuite le reste du corps. Le sang circule dans les artères qui se subdivisent jusqu'à devenir des capillaires au niveau des organes. Les organes sont alimentés en nutriments et en oxygène. Le sang se charge alors en dioxyde de carbone, puis remonte ensuite vers le coeur par le système veineux.

On utilise une description simplifiée dans laquelle le coeur est modélisé par une pompe. On cherche à évaluer la puissance mécanique associée. On considère une pulsation cardiaque de 70 pulsations par minute. Le volume de sang expulsé à chaque pulsation est de  $75 \text{ cm}^3$ . On suppose que la section  $S$  de l'aorte (artère qui chemine le sang depuis le coeur vers le système artériel) est égale à  $S = 3,0 \text{ cm}^2$ .

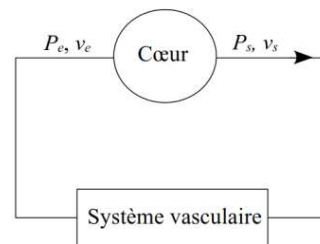
On donne les caractéristiques suivantes:

- différences entre pressions d'entrée et de sortie  
 $P_s - P_e = 100 \text{ mbar}$

- lien entre vitesses d'entrée et de sortie  $v_e = v_s/2$

- l'énergie interne massique du sang, notée  $u$ , est supposée constante

- l'enthalpie massique s'écrit  $h = u + \frac{P}{\rho_s}$



**21.** Déterminer la valeur numérique du débit volumique sanguin moyen  $D_v$ . En déduire la valeur numérique de la vitesse  $v_s$  du sang dans l'aorte.

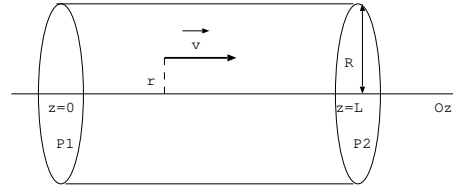
**22.** Calculer le travail utile massique fourni par le coeur en supposant que celui-ci fonctionne comme une pompe adiabatique. En déduire la valeur numérique de la puissance fournie.

On veut décrire l'écoulement du sang dans un vaisseau sanguin. Le vaisseau considéré est de forme cylindrique de longueur  $L$  et de rayon  $R$ . La longueur  $L$  est supposée très grande devant  $R$ . On assimile le sang à un fluide visqueux, incompressible et homogène. On note  $\eta$  la viscosité dynamique du sang et  $\rho$  sa masse volumique. On se place en régime permanent et on suppose que l'écoulement est laminaire. L'influence de la pesanteur est supposée négligeable. En notant  $Oz$  l'axe du cylindre, et en adoptant les coordonnées cylindriques, le champ de vitesses s'écrit  $\vec{v}(M, t) = v(r, \theta, z)\vec{e}_z$ .

**23.** À quelle condition sur le nombre de Reynolds l'hypothèse d'un écoulement laminaire est-elle vérifiée?

On considère une portion cylindrique de canalisation, de rayon  $R$  et de longueur  $L$ . On note  $P_1$  la pression à l'entrée de cette portion et  $P_2$  la pression en sortie.

On admet que  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_2 - P_1}{L}$ .



En coordonnées cylindriques on donne:

gradient :  $\vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$

divergence :  $\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

laplacien:  $\Delta V(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)$

**24.** Montrer que la vitesse ne dépend que de la variable  $r$ . Que vaut la vitesse du fluide en contact avec la paroi?

**25.** Déduire de l'équation de Navier-Stokes que le champ de vitesse vérifie l'équation  $\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta_s L}r$ . En déduire l'expression littérale du champ de vitesse dans le fluide.

**26.** Montrer que le débit volumique du fluide  $D_v$  vérifie:  $D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta_s L}(P_1 - P_2)$ .

En déduire l'expression littérale de la vitesse moyenne  $v_m$  de l'écoulement en fonction de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\eta$ ,  $L$  et  $R$ .

**27.** On considère que les vaisseaux capillaires sont assimilables à des cylindres de longueur  $L = 1,0 \text{ cm}$  et de rayon  $R = 5,0 \mu\text{m}$ . On supposera par ailleurs que la variation de pression le long d'un capillaire est typiquement  $\Delta P = 10 \text{ kPa}$ . Vérifier que l'hypothèse d'un écoulement laminaire est validée.

**28.** En supposant que l'ensemble des capillaires sont en dérivation et que la vitesse du sang dans un capillaire est de l'ordre de  $1 \text{ mm/s}$ , donner une estimation du nombre de capillaires présents dans le système vasculaire.

## Annexe 1 - Données relatives à la partie I

- Charge élémentaire :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Rayon de l'atome d'hydrogène :  $r_H = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
- Masse volumique de l'eau :  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Masse molaire de l'eau :  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Compressibilité adiabatique de la cornée :  $\chi_s = 3,6 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
- Énergie massique de vaporisation de l'eau :  $L_{\text{vap}} = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Enthalpie de standard de formation de l'eau :  $\Delta_f H^0 = -241 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Énergie d'une impulsion laser :  $E_{\text{imp}} = 4,0 \mu\text{J}$
- Durée d'une impulsion du laser :  $\tau = 2 \text{ fs} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ s}$
- Longueur d'onde du laser femtoseconde :  $\lambda = 1,0 \mu\text{m}$
- Dimension de la zone de focalisation :  $d = 1,0 \mu\text{m}$

## Annexe 2 - Données relatives à la partie II

Masse volumique du sang  $\rho_s = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et viscosité du sang  $\eta_s = 4,0 \text{ mPa} \cdot \text{s}$

### III. Correction: physique et médecine (extrait E3A PSI 2025)

1. L'onde se propage selon  $Ox$  donc le terme de phase est de la forme  $\omega t - kx$ . Elle est polarisée selon  $Oy$ , cela désigne la direction du champ électrique. On peut donc écrire  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - kx)$ .

C'est une OPPH donc on en déduit le champ magnétique en appliquant  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$  avec dans le vide  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$ . On a donc  $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \vec{e}_z \cos(\omega t - kx)$ .

On en déduit le vecteur de Poynting  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x = E_0^2 \epsilon_0 c \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$  car  $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ . Le vecteur de Poynting indique le sens et la direction de propagation de l'énergie de l'onde, cela correspond bien au sens et à la direction de propagation de l'onde.

2. Le vecteur de Poynting est la puissance surfacique instantanée transportée par l'onde. On en déduit la puissance en calculant le flux de la valeur moyenne du vecteur de Poynting à travers la surface du faisceau à savoir ici  $\pi(d/2)^2$ . On en déduit ensuite l'énergie en multipliant par la durée d'une impulsion soit:

$$E_{imp} = \langle E_0^2 \epsilon_0 c \cos^2(\omega t - kx) \rangle \pi (d/2)^2 = \frac{E_0^2 \epsilon_0 c \tau \pi d^2}{8}.$$

3. Soit un noyau de charge  $+e$ , il crée en  $M$  placé à une distance  $r_H$  de lui un champ électrique de norme  $E_H = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 r_H^2}$ .

4. AN: champ créé par le noyau:  $E_H = \frac{e}{4\pi \epsilon_0 r_H^2} = 5,8.10^{11} \text{ V/m}$

AN: champ créé par le laser:  $E_0 = \sqrt{\frac{8E_{imp}}{\epsilon_0 c \pi d^2 \tau}} = 1,4.10^{12} \text{ V/m}$

Le champ créé par le laser est deux fois plus grand que celui créé par le noyau dans l'atome d'hydrogène. Ils sont tout de même du même ordre de grandeur.

5. Le rapport entre la force magnétique et la force électrique est  $\frac{q||\vec{V} \wedge \vec{B}||}{q||\vec{E}||} = \frac{VB}{E} = \frac{V}{c} \ll 1$  en prenant comme hypothèse que la vitesse d'un électron est négligeable devant la vitesse de la lumière (ce qui est le cas en mécanique non relativiste).

6. RFD appliquée à un électron:  $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} + m_e \vec{g} = -e\vec{E}$ .

Soit en régime forcé (en notation complexe) :  $m_e i\omega \underline{v}_e = -e\vec{E}$  donc  $\underline{v}_e = \frac{-e}{i\omega m_e} \vec{E}$  et par suite  $\underline{j} = -ne e \underline{v} = \frac{ne e^2}{i\omega m_e} \vec{E}$  : on reconnaît la loi d'ohm locale avec  $\underline{\gamma} = \frac{ne e^2}{i\omega m_e}$  désigne la conductivité qui ici est complexe.

7. Equation de Maxwell Gauss:  $\text{div} \vec{E} = 0$  car  $\rho = 0$ : le plasma est neutre

Equation de Maxwell Faraday:  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Equation de Maxwell Thomson  $\text{div} \vec{B} = 0$

Equation de Maxwell Ampère:  $\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  avec  $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$ .

8. On écrit:

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On en déduit l'équation de propagation :  $\Delta \vec{E} - \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ .

On en déduit la relation de dispersion en remplaçant la solution proposée dans l'équation de propagation :  $-\underline{k}^2 - \mu_0 \gamma j \omega - \mu_0 \epsilon_0 (-\omega^2) = 0$  soit  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j \mu_0 \gamma \omega = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2 \mu_0}{m_e} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0 c^2} = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}$  avec

$$\omega_P = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}} \text{ (on a utilisé } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \text{)}.$$

9. Pour  $\omega < \omega_p$ ,  $k^2$  est négatif donc  $k$  est imaginaire pur: cela signifie qu'il y a absorption sans propagation.

$$\text{On a donc } k = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm \frac{i}{\delta}.$$

On remplace dans l'expression du champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t \pm \frac{ix}{\delta})} = \vec{E}_0 e^{\pm \frac{x}{\delta}} e^{i\omega t}$ .

En notation réelle:  $\vec{E} = \mathcal{R}e(\vec{E}) = \vec{E}_0 e^{\pm \frac{x}{\delta}} \cos(\omega t)$ : c'est une onde stationnaire amortie, elle s'appelle aussi onde évanescence.

10. Une impulsion laser apporte l'énergie  $E_{imp} = 4 \mu J$ .

Cette énergie sert d'après l'énoncé à vaporiser une sphère de rayon  $R$  contenant de l'eau liquide et à transformer l'eau vapeur obtenue en  $H_2$  et  $O_2$ .

Exprimons dans un premier temps l'énergie nécessaire pour vaporiser une sphère de rayon  $R$  de liquide:  $\Delta H_1 = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 L_{vap}$  où  $\frac{4}{3} \pi R^3$  désigne le volume de la sphère et  $\rho \frac{4}{3} \pi R^3$  désigne sa masse.

Exprimons dans un second temps l'énergie qu'il faut pour réaliser la réaction  $H_2 O_g \rightarrow \frac{1}{2} O_{2,g} + H_{2,g}$  d'une masse  $\rho \frac{4}{3} \pi R^3$  d'eau vapeur. Soit  $\Delta H_2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{M} (-\Delta_f H^0)$ .

$$\text{On a donc } E_{imp} = \Delta H_1 + \Delta H_2 = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 L_{vap} + \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{M} (-\Delta_f H^0) = \frac{4\pi \rho R^3}{3} (L_{vap} - \frac{-\Delta_f H^0}{M}) \text{ d'où } R = (\frac{3E_{imp}}{4\pi \rho (L_{vap} - \frac{-\Delta_f H^0}{M})})^{1/3} = 4,5 \mu m.$$

11. La surface à découper est donc  $S = \pi (d_c/2)^2 = 6,3 \cdot 10^{-5} m^2$ . La surface découpée par une impulsion est  $\pi R^2$  donc il faut procéder à  $N$  impulsions telles que  $N = \frac{S}{\pi R^2} = \frac{d_c^2}{4R^2} = 10^6$ .

On doit réaliser  $N = 10^6$  impulsions sur une durée  $\Delta t = 10 s$  donc la période entre deux impulsions est  $T = \frac{1}{f} = \frac{\Delta t}{N}$  d'où la fréquence  $f = \frac{N}{\Delta t} = 10^5 Hz$ . On remarque que la durée d'une impulsion est très brève devant la période des impulsions:  $\tau = 2 \cdot 10^{-15} s \ll T = 10^{-5} s$ .

12. L'approximation acoustique consiste à dire que  $p(x, t) \ll P_0$  et  $\mu(x, t) \ll \rho_0$ . Donc on fait des DL à l'ordre 1 pour linéariser les équations de la mécanique et de la thermodynamique.  $v$ ,  $\mu$  et  $p$  sont des infiniment petits d'ordre 1.

$$\text{On a } \chi_S = \frac{1}{\rho_0 + \mu} \frac{\rho - \rho_0}{P - P_0} = \frac{1}{\rho_0 + \mu} \frac{\mu}{p} \approx \frac{\mu}{\rho_0 p} \text{ car } \mu p \text{ est d'ordre 2, on le néglige. On a donc } \mu = \rho_0 \chi_S p.$$

13. On écrit l'équation d'Euler et on en fait un DL à l'ordre 1 en  $v$ ,  $p$  et  $\mu$ :

$$\rho (\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}) = -\text{grad} P \text{ (on néglige le poids)}$$

$$\text{Soit } (\rho_0 + \mu) \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x \text{ (l'accélération convective est négligée, elle est d'ordre 2 en vitesse)}$$

$$\text{Soit en ne gardant que les termes d'ordre 1 et en projetant sur } Ox: \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

14. L'équation de conservation de la masse s'écrit  $\text{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  avec  $\text{div}(\rho v) = \text{div}(\rho_0 v + \mu v) \approx \text{div}(\rho_0 v) = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}$  (le terme  $\mu v$  est d'ordre 2).

$$\text{On a donc } \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

$$15. \text{ On a } \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial p}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x} (-\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} (-\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial \mu}{\partial t}) = \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

$p$  vérifie donc une équation de d'Alembert:  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ , la vitesse de propagation des ondes sonores est donc  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$ .

AN:  $c = 1,7 \cdot 10^3 m/s$  en prenant pour masse volumique de la cornée, la masse volumique de l'eau.

16. Pour une  $OPPH^+$  on a  $Z = +\rho_0 c = +\sqrt{\frac{\rho_0}{\chi S}}$ .

Pour une  $OPPH^-$  on a  $Z = -\rho_0 c = -\sqrt{\frac{\rho_0}{\chi S}}$ .

17. Les ondes incidente et transmise sont des  $OPPH^+$  soit  $p_i = +Z_1 v_i$  et  $p_t = +Z_2 v_t$ .

L'onde réfléchi est une  $OPPH^-$  donc  $p_r = -Z_1 v_r$ .

18. Sur un dioptré, on exprime la continuité de la surpression et du débit volumique. Ici les surfaces des milieux sont identiques donc la continuité du débit volumique devient la continuité des vitesses.

La continuité de la vitesse donne  $v_i(x=0, t) + v_r(x=0, t) = v_t(x=0, t)$  soit  $v_i(x=0, t) + r v_i(x=0, t) = \tau v_i(x=0, t)$ . Après simplification on a  $1 + r = \tau$ .

La continuité de la surpression donne  $p_i(x=0, t) + p_r(x=0, t) = p_t(x=0, t)$  soit  $Z_1(v_i(x=0, t) - v_r(x=0, t)) = Z_2 v_t(x=0, t)$  ou encore  $Z_1(v_i(x=0, t) - r v_i(x=0, t)) = Z_2 \tau v_i(x=0, t)$  Après simplification on a  $Z_1(1 - r) = Z_2 \tau$ .

On résout le système  $1 + r = \tau$  et  $1 - r = \frac{Z_2}{Z_1} \tau$ .

On fait la somme des équations  $2 = \tau(1 + \frac{Z_2}{Z_1})$  soit  $\tau = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1}$ .

On en déduit  $r = \tau - 1 = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ .

19. On définit l'intensité acoustique par  $I_i(x) = \langle p_i(x, t) v_i(x, t) \rangle = Z_1 \langle v_i(x, t)^2 \rangle$  et  $I_r(x) = \langle p_r(x, t) v_r(x, t) \rangle = -Z_1 \langle v_r(x, t)^2 \rangle$ .

On a donc pour coefficient de réflexion en intensité  $R = \frac{|I_r(x=0)|}{I_i(x=0)} = \frac{\langle v_r^2(x, t) \rangle}{\langle v_i^2(x, t) \rangle} = r^2 = (\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2})^2$ .

20. A l'aide de ce dispositif on émet une onde sonore dans la cornée, une partie de celle-ci se réfléchit à l'interface cornée/ humeur aqueuse et est reçue par un détecteur placé à proximité de l'émetteur. On mesure  $\Delta t$ , le temps séparant l'émission de l'onde et sa réception suite à la réflexion sur l'interface, connaissant la célérité  $c$  de l'onde dans la cornée, on en déduit l'épaisseur  $e$  de la cornée par  $2e = \frac{\Delta t}{c}$  (l'onde parcourt la distance  $2e$  après une réflexion pour revenir à l'émetteur).

21. Le débit volumique est le volume de fluide qui traverse la section de la canalisation par unité de temps. L'énoncé nous dit que le volume de sang expulsé à chaque pulsation est  $V = 75 \text{ cm}^3$  et que la période entre deux pulsations est  $T = \frac{60}{70} = 0,86 \text{ s}$  (70 pulsations par minute). Le débit moyen est donc  $D = \frac{V}{T} = 8,75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

On a aussi  $D = v_s S$  soit  $v_s = \frac{D}{S} = 0,29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , la vitesse du sang dans l'aorte.

22. On applique le premier principe industriel à la pompe constituée du coeur soit:  $h_s - h_e + \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} = w_u + q$  avec  $q = 0$  car on suppose la pompe adiabatique et  $H = U + PV$  donc en divisant par la masse  $h = u + \frac{P}{\rho}$ .

Ainsi on a  $w_u = u_s + \frac{P_s}{\rho_s} - u_e - \frac{P_e}{\rho_s} + \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} = \frac{P_s - P_e}{\rho_s} + \frac{3}{8} v_s^2$

soit  $w_u = 9,1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$  et la puissance est  $P = \rho_s D w_u = 0,87 \text{ W}$ .

23. L'écoulement est laminaire lorsque les effets convectifs sont négligeables devant les effets diffusifs, on peut proposer  $Re < 2000$ .

24. Par invariance par rotation autour de  $Oz$  on peut dire que la variable  $\theta$  n'intervient pas.

L'écoulement est incompressible donc  $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$  donc  $v$  ne peut pas dépendre de  $z$ .

Le fluide visqueux adhère sur les parois donc la vitesse est nulle sur les parois soit  $v(r=R) = 0$ .

25. En négligeant le poids l'équation de Navier-Stokes s'écrit:  $\rho_s (\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta_s \Delta \vec{v}$

avec  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$  car on est en régime stationnaire

avec  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = v(r) \frac{d}{dz} (v(r) \vec{e}_z) = \vec{0}$

avec  $\Delta \vec{v} = \Delta v(r) \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv(r)) \vec{e}_z$

avec  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{dP}{dz} \vec{e}_z = \frac{P_2 - P_1}{L} \vec{e}_z$ .

L'équation de Navier Stokes projeté sur  $Oz$  donne:  $-\frac{P_2 - P_1}{L} + \eta_s \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dv(r)}{dr}) = 0$  soit  $\frac{d}{dr} (r \frac{dv(r)}{dr}) = \frac{P_2 - P_1}{\eta_s L} r$

On primitive par rapport à  $r$ :  $r \frac{dv(r)}{dr} = \frac{(P_2 - P_1)r^2}{2L\eta_s} + A$  soit  $\frac{dv(r)}{dr} = \frac{(P_2 - P_1)r}{2L\eta_s} + \frac{A}{r}$  (le terme  $A/r$  diverge en  $r = 0$  donc on doit prendre  $A = 0$ ).

On primitive par rapport à  $r$ :  $v(r) = \frac{(P_2 - P_1)r^2}{4L\eta_s} + B$ .

On trouve  $B$  en écrivant que la vitesse du fluide est nulle sur les parois soit  $v(r = R) = 0 = \frac{(P_2 - P_1)R^2}{4L\eta_s} + B$  soit  $B = -\frac{(P_2 - P_1)R^2}{4L\eta_s}$ .

On a donc  $v(r) = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4L\eta_s}$ .

**26.** On en déduit le débit volumique par  $D_v = \iint v(r) dS = \iint v(r) dr r d\theta = \int_0^R v(r) r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \frac{(P_1 - P_2)}{4L\eta_s} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = 2\pi \frac{(P_1 - P_2)}{4L\eta_s} (R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}) = 2\pi \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta_s L} \frac{R^4}{4} = \frac{(P_1 - P_2)\pi R^4}{8L\eta_s}$ .

Le débit volumique s'exprime aussi en fonction de la vitesse moyenne selon  $D_v = v_m \pi R^2$  soit  $v_m = \frac{D_v}{\pi R^2} = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8L\eta_s}$ .

**27.** AN:  $v_m = \frac{\Delta P R^2}{8L\eta_s} = 0,78 \text{ mm/s}$ .

Le nombre de Reynolds s'écrit  $Re = \frac{\rho_s v 2R}{\eta_s} = 2,1 \cdot 10^{-3} \ll 1$  donc l'écoulement est bien laminaire.

**28.** Le débit volumique est l'équivalent d'une intensité en électricité, on a d'après la loi des noeuds pour  $N$  branches identiques en dérivation parcourues chacune par un courant d'intensité  $i$ :  $I = Ni$  soit ici  $D = ND_v$  donc  $N = \frac{D}{D_v} = \frac{D}{v_m \pi R_c^2} = 10^9$  capillaires.

#### IV. Stabilisateur d'images (extrait CCINP MP 2021)

1. La plaque est, dans le référentiel d'étude galiléen, à l'équilibre sous l'action de son poids  $\vec{P} = +mg\vec{e}_x$  et de la force de rappel élastique  $\vec{F} = -k(x_{eq} - l_0)\vec{e}_x$ . On a donc:  $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$  soit  $mg - k(x_{eq} - l_0) = 0$  et  $x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} > l_0$ : en effet à l'équilibre le ressort est étiré sous l'action de la masse.

2. Le référentiel lié à la boîte est en translation rectiligne non uniforme dans le référentiel d'étude galiléen donc il n'est pas galiléen.

3. Dans le référentiel de la boîte, la plaque subit son poids  $\vec{P} = +mg\vec{e}_x$ , la force de rappel élastique  $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{e}_x$ , la force de frottements  $\vec{f} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$  et la force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a} = -ma(t)\vec{e}_x$ . La force d'inertie de Coriolis est nulle car le référentiel lié à la boîte n'est pas en rotation dans le référentiel terrestre.

Le PFD appliqué à la plaque dans le référentiel de la boîte s'écrit:

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = mg\vec{e}_x - k(x - l_0)\vec{e}_x - \alpha\dot{x}\vec{e}_x - ma(t)\vec{e}_x$$

Ce qui conduit à l'équation différentielle:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{kl_0}{m} - a(t)$$

On identifie avec l'énoncé:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$  donc  $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$  (le facteur de qualité est d'autant plus grand que les frottements sont faibles) et  $g + \frac{kl_0}{m} - a(t) = \frac{k}{m}(l_0 + \frac{mg}{k}) - a(t) = \omega_0^2 x_{eq} - a(t) = f(t)$ .

4. On a  $x = X + x_{eq}$ , soit  $\dot{x} = \dot{X}$  et  $\ddot{x} = \ddot{X}$ . L'équation différentielle est donc:  $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2(X + x_{eq}) = \omega_0^2 x_{eq} - a(t)$  soit  $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a(t)$ .

En notation complexe:  $\ddot{X} = -\omega^2 X$  et  $\dot{X} = i\omega X$ .

On a donc  $-\omega^2 X + \frac{\omega_0}{Q}i\omega X + \omega_0^2 X = -A_m e^{i\omega t}$ .

On en déduit  $X = \frac{-A_m e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega\omega_0}{Q}}$ . En divisant par  $e^{i\omega t}$  on obtient:

$$\underline{X}_m = \frac{-A_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega\omega_0}{Q}}$$

5. A basse fréquence, on a  $\underline{X}_m \approx \frac{-A_m}{\omega_0^2} \approx \frac{-mA_m}{k}$ .

On trouve  $X_m$  en prenant le module de  $\underline{X}_m$  soit  $X_m = \frac{mA_m}{k}$ .

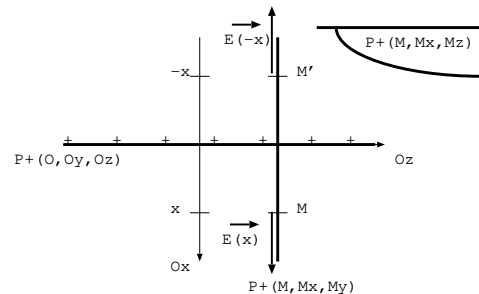
On trouve  $\phi$  en prenant l'argument de  $\underline{X}_m$  soit  $\phi = \pi$ .

On a donc  $X(t) = \mathcal{R}e(\frac{mA_m}{k}e^{i(\omega t + \pi)}) = \frac{mA_m}{k}\cos(\omega t + \pi) = -\frac{mA_m}{k}\cos(\omega t) = -\frac{m}{k}a(t)$ : la condition  $X(t)$  proportionnelle à  $a(t)$  est bien vérifiée.

6. Les basses fréquences sont obtenues pour  $\omega \ll \omega_0$  soit pour  $f \ll \frac{\omega_0}{2\pi} = 800 \text{ Hz}$ . Donc dans le cas des tremblements humains, la position de la plaque par rapport à sa position d'équilibre est bien proportionnelle à  $a(t)$ , l'accélération de la main.

7. 7.a.  $M$  appartient aux plans  $P^+(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  et  $P^+(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ .

Donc le champ électrique en  $M$  appartient à ces plans donc le champ électrique en  $M$  est selon  $Ox$ .



Il y a invariance par translation de la distribution de charges selon  $Oz$  et  $Oy$  car le plan est infini dans ces deux directions donc le champ électrique ne dépend que de  $x$ .

On a donc  $\vec{E}(M) = E(x)\vec{e}_x$ .

**7.b.** On considère les points  $M(x)$  et  $M'(-x)$ , ils sont symétriques par rapport au plan  $P^+(Oyz)$  donc les champs électriques en ces points sont symétriques par rapport à ce plan. On fait un schéma et on trouve que  $\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x)$ .

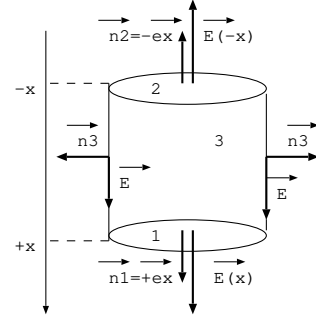
On prend pour surface de Gauss un cylindre de section  $S$  compris entre les plans  $-x < 0$  et  $x > 0$ .

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} \vec{n}$$

$$\phi = \vec{E}(x) \cdot S\vec{e}_x + \vec{E}(-x) \cdot (-S\vec{e}_x) = 2E(x)S.$$

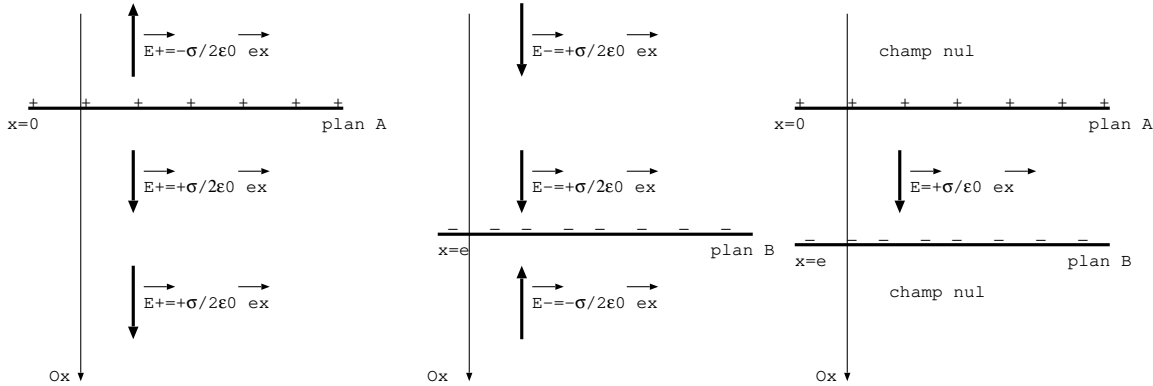
On applique le théorème de Gauss:  $\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  avec ici  $Q_{int} = \sigma S$ .

$$\text{On a donc } \phi = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = 2E(x)S \text{ soit } \vec{E}(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x.$$



Pour  $x < 0$  on a  $\vec{E}(x < 0) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$  en appliquant la propriété trouvée  $\vec{E}(-x) = -\vec{E}(x)$ .

**8. 8.a.** Le champ électrique créé par les deux plans est égal à la somme des champs électriques créé par chaque plan. Le plan  $A$  crée un champ que je note  $\vec{E}_+$  et qui diverge depuis le plan  $A$  car il est chargé positivement. Le plan  $B$  crée un champ que je note  $\vec{E}_-$  et qui converge vers le plan  $B$  car il est chargé négativement.



Entre les plans  $A$  et  $B$ , le champ résultant est  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_x$ .

Au dessous de  $A$  et au dessus de  $B$ , le champ électrique résultant est nul.

$$\mathbf{8.b.} \quad \text{On applique } U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^e dx = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}.$$

Autre façon: On peut aussi appliquer  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dx}\vec{e}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_x$ . On a donc  $\frac{dV}{dx} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  soit  $V(x) = -\frac{\sigma x}{\epsilon_0} + C$ . On en déduit  $U = V_A - V_B = V(x=0) - V(x=e) = C - (-\frac{\sigma e}{\epsilon_0} + C) = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$ .

**9.** La capacité d'un condensateur est définie par  $C = \frac{Q}{U}$ . Ici on a  $Q = \sigma S$  et  $U = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$ . Soit  $C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma e}{\epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ .

**10.** Dans le dispositif proposé on a  $U = \frac{Q}{C}$  avec  $C = \frac{\epsilon_0 S}{x(t)} = \frac{\epsilon_0 S}{X(t) + e}$ .

On a donc  $U = \frac{Q(X(t) + e)}{\epsilon_0 S}$ . La mesure de la tension  $U$  permet donc d'accéder à la valeur de  $X(t)$  et donc à la valeur de l'accélération  $a(t)$  de la main. Ce dispositif permet donc la mesure recherchée.