

CCB modélisation physique

Le sujet comprend deux exercices indépendants. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroté les pages au format i/N où i est le numéro de page et N le nombre de pages.

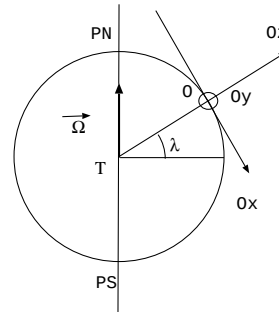
Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

I. Exercice I: effet de la rotation propre de la Terre

En 1831 Ferdinand Reich fit tomber des projectiles dans un puits de profondeur $h = 158 \text{ m}$ à Freiberg (Saxe) pour mettre en évidence l'effet de la rotation de la Terre sur la chute libre d'un corps.

On étudie la chute dans le puits d'un objet assimilé à un point matériel M de masse m , abandonné sans vitesse initiale depuis le point O sur le sol à la latitude $\lambda = 50,9^\circ$ nord. On néglige tout frottement.

Le référentiel terrestre est en rotation de vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. On étudie le mouvement de M dans la base de projection $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où Oz désigne la verticale ascendante du lieu, Ox la tangente au méridien passant par O dirigé vers le sud et Oy la tangente au parallèle passant par O et dirigé vers l'est.



1. Uniquement dans cette question, on suppose que le référentiel terrestre est galiléen. Exprimer dans ce cas le vecteur vitesse de M au cours de sa chute et montrer que le temps t_f pour lequel le point matériel

atteint le fond du puits s'écrit $t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

2. Exprimer $\vec{\Omega}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en fonction de λ et Ω défini par $\Omega = \|\vec{\Omega}\|$.

3. Donner la définition du poids $\vec{P}$ d'un corps. Le champ de pesanteur $\vec{g}(M)$ est le rapport du poids sur la masse d'un corps. Exprimer le champ de pesanteur en O en fonction de λ , Ω , R_T (le rayon de la Terre), $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ (le champ de gravitation terrestre au niveau du sol) et des vecteurs de la base de projection définie ci-dessus. Exprimer la norme du champ de pesanteur.

4. On écrit le code suivant:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 RT=6370E3 # rayon de la Terre
5 G=6.67E-11 # constante de gravitation universelle
6 MT=5.97E24 # masse de la Terre
7 Omega=[instruction 1] # vitesse angulaire de la rotation propre de la Terre
8 g0=G*MT/RT**2
9
10 def f(b):
11     b1=b*2*np.pi/360
12     c1=Omega**2*RT*np.sin(b1)*np.cos(b1)
13     c2=-g0+Omega**2*RT*np.cos(b1)**2
14     return (c1**2+c2**2)**0.5
15
16 print('resultat1=',f(0))
17 print('resultat2=',f(50.9))
18 print('resultat3=',f(90))
```

On exécute le code et python renvoie:

resultat1 = 9.779752927123573

resultat2 = 9.800055162930747

resultat3 = 9.813440652193735

Ecrire le contenu de l'instruction 1.

Préciser ce que représentent resultat1, resultat2 et resultat3, donner leur unité, commenter ces valeurs et conclure pour la suite de l'étude.

5. On note $\vec{v}$ et $\vec{a}$, les vecteurs vitesse et accélération de M dans le référentiel terrestre non galiléen. Montrer que $\vec{a}$ est de la forme $\vec{a} = \alpha \vec{e}_z + \beta \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$. Exprimer α et β en fonction des données.

La suite est consacrée à la résolution de cette équation de deux façons différentes:

- Méthode 1: de façon théorique par un calcul approché
- Méthode 2: par simulation grâce à la méthode d'Euler

6. Méthode 1: exprimer le vecteur $\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ en supposant que la vitesse a pour expression la vitesse trouvée dans la première question quand le référentiel terrestre était supposé galiléen. En déduire les équations horaires du mouvement et montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit $y = \frac{g_0}{3} \Omega \cos \lambda \left(\frac{-2z}{g_0} \right)^{3/2}$. M est-il dévié vers l'est ou vers l'ouest?

7. Méthode 2: on écrit le code suivant:

```
20 lat=[instruction 2] # latitude en radian
21 d1=Omega*np.cos(lat)
22 d2=Omega*np.sin(lat)
23 vecOmega=np.array([...,...,...]) # vecteur Omega dans la base (Ox,Oy,Oz)
24 vecg=np.array([...,...,...]) # vecteur champ de gravitation
25 # en négligeant la rotation de la Terre dans la base (Ox,Oy,Oz)
26
27 N=100
28 vecPos=np.zeros((N,3))
29 vecVit=np.zeros((N,3))
30 vecPos[0,:]=np.array([...,...,...]) # position initiale de M
31 vecVit[0,:]=np.array([...,...,...]) # vitesse initiale de M
32 t=[0]
33 h=158
34 tf=[instruction 3]
35 dt=tf/N
36 for i in range(N-1):
37     t.append(t[i]+dt)
38     a=vecg-2*np.cross(vecOmega,vecVit[i,:])
39     vecVit[i+1,:]=a*dt+vecVit[i,:]
40     vecPos[i+1,:]=[instruction 4]
```

Dans ce code, ligne 38, np.cross permet de réaliser le produit vectoriel de deux vecteurs. Par exemple, np.cross(A,B) correspond à $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

Dans ce code, le tableau vecPos comprend N lignes et 3 colonnes et correspond aux positions x , y et z de M aux différents instants $t_i = idt$.

Le terme vecPos[i,0] représente la position x à l'instant $t_i = idt$.

Le terme vecPos[i,1] représente la position y à l'instant $t_i = idt$.

Le terme vecPos[i,2] représente la position z à l'instant $t_i = idt$.

De la même façon, le tableau vecVit comprend N lignes et 3 colonnes et correspond aux composantes de la vitesse soit v_x , v_y et v_z de M aux différents instants $t_i = idt$.

Le terme vecVit[i,0] représente v_x à l'instant $t_i = idt$.

Le terme vecVit[i,1] représente v_y à l'instant $t_i = idt$.

Le terme vecVit[i,2] représente v_z à l'instant $t_i = idt$.

7.a. Ecrire les instructions 2 et 3. Recopier et compléter les lignes 23, 24, 30 et 31.

7.b. En faisant un DL à l'ordre 1 en dt , exprimer $\vec{v}(t + dt)$ en fonction de $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ et dt . Exprimer de même $\vec{OM}(t + dt)$ en fonction de $\vec{OM}(t)$, $\vec{v}(t)$ et dt . En déduire l'instruction 4.

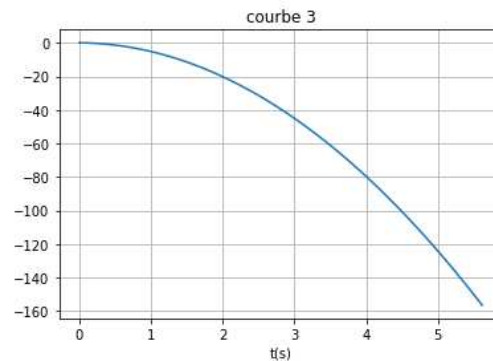
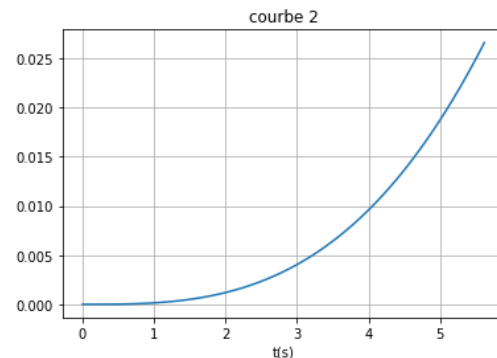
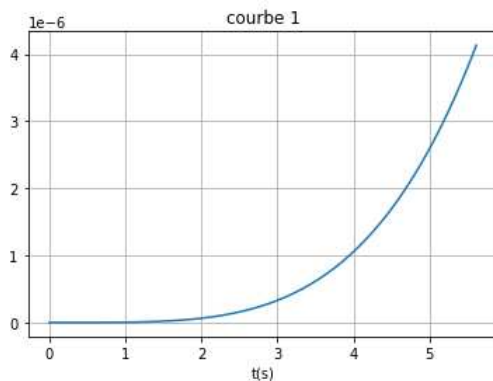
7.c. On complète le code par:

```

42 plt.plot(t,vecPos[:,0])
43 plt.xlabel('t(s)')
44 plt.title('courbe 1')
45 plt.grid()
46 plt.show()
47
48 plt.plot(t,vecPos[:,1])
49 plt.xlabel('t(s)')
50 plt.title('courbe 2')
51 plt.grid()
52 plt.show()
53
54 plt.plot(t,vecPos[:,2])
55 plt.xlabel('t(s)')
56 plt.title('courbe 3')
57 plt.grid()
58 plt.show()

```

L'exécution du code donne les courbes



Identifier chacune des courbes en justifiant votre choix. Donner les déviations selon Ox et Oy de M quand il est à une profondeur de 100 m (les distances sont en mètre). Commenter.

8. Pour terminer cette étude, on désire tracer sur le même graphe les courbes donnant y en fonction de z obtenues par les deux méthodes. La courbe en trait plein ligne 65 correspond à l'étude théorique (question 6) et la courbe point par point ligne 66 correspond à la résolution par la méthode d'Euler.

Pour cela on écrit le code suivant:

```

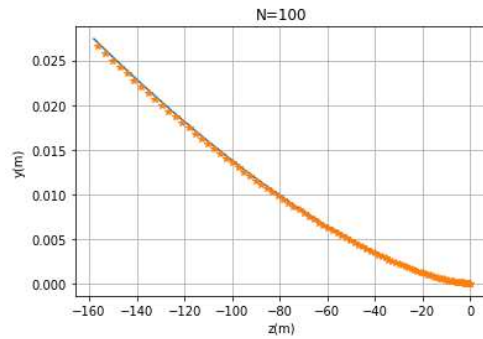
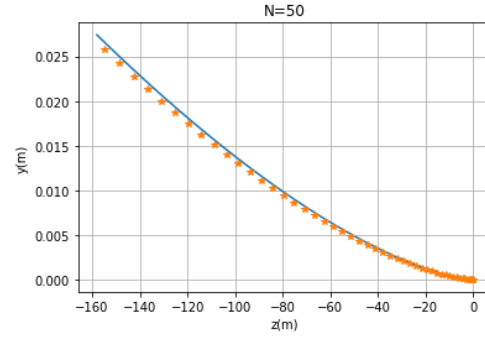
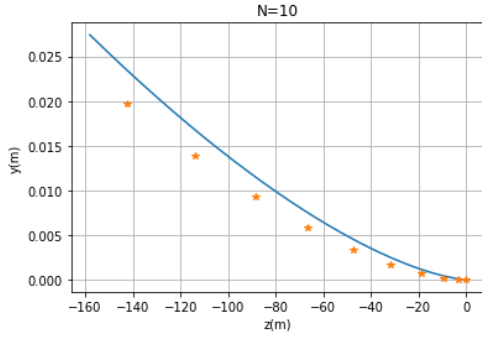
60 def traj(z):
61     return [instruction 5]
62
63 z=np.linspace(-h,0,2000)
64 y= [instruction 6]
65 plt.plot([instruction 7])
66 plt.plot([instruction 8],'+')
67 plt.grid()
68 plt.title('N=100')
69 plt.xlabel('z(m)')
70 plt.ylabel('y(m)')
71 plt.show()

```

8.a. Ecrire l'instruction 5 qui renvoie l'équation de la trajectoire soit z en fonction de y (utiliser les résultats précédents).

8.b. Ecrire les instructions 6, 7 et 8.

8.c. L'exécution du code donne les courbes suivantes pour trois valeurs de N différentes à savoir $N = 10$, $N = 50$ et $N = 500$. Commenter et conclure.



II. Exercice II: étude de la circulation routière

On étudie la circulation sur une route à une seule voie confondue avec l'axe Ox . Les voitures sont identiques et ont pour longueur L_0 .

On adopte un modèle continu pour décrire la circulation routière, cela revient donc à regarder l'évolution du trafic sur des distances grandes devant la longueur L_0 d'une voiture.

On utilise les notations suivantes:

$v(x, t)$ désigne la vitesse moyenne des véhicules à la position x à l'instant t . On considère que les véhicules se déplacent selon l'axe Ox dans le sens des x croissants.

$c(x, t)$ (en véhicules par mètre) désigne la concentration de véhicules par unité de longueur de route à l'instant t et à la position x . Sur une longueur L_0 , il y a, au plus, un seul véhicule, soit $c(x, t) \leq c_{max} = \frac{1}{L_0}$.

$q(x, t)$ (en véhicules par seconde) désigne le débit de véhicules, c'est-à-dire le nombre de véhicules par unité de temps traversant la section de la route située à la position x .

1. Donner la relation entre $q(x, t)$, $c(x, t)$ et $v(x, t)$.

2. On considère le système élémentaire constitué de la portion d'autoroute comprise entre x et $x + dx$, on suppose qu'il n'y a ni perte, ni création de véhicules.

Exprimer $N(t)$ et $N(t + dt)$, le nombres de véhicules présents dans le système aux instants t et $t + dt$.

Exprimer δN_e et δN_s , les nombres de véhicules qui entrent et qui sortent du système entre les instants t et $t + dt$.

Déduire de la conservation du nombre de véhicules, l'équation aux dérivées partielles: $\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} (*)$.

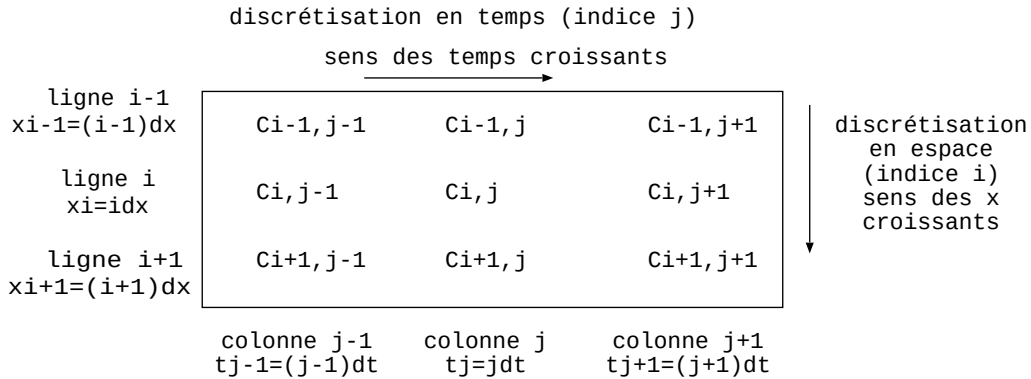
Pour comprendre comment évoluent la concentration, la vitesse moyenne ou le débit de véhicules au cours du temps sur la route, il convient donc de résoudre cette équation aux dérivées partielles à partir de la situation initiale.

Afin de résoudre numériquement l'équation (*), nous avons besoin de discrétiser les variables de temps et d'espace. On choisit les paramètres suivants :

- pas d'espace (en mètres) : dx
- pas de temps (en secondes) : dt
- longueur de la portion de route étudiée : $Lr = N_x dx$
- durée de simulation : $Temps = N_t dt$

On introduit un tableau C des concentrations. Les termes de ce tableau sont de la forme $C[i, j] = C(x_i, t_j) = C(idx, jdt)$, terme sur la ligne i et la colonne j .

Le tableau C comprend $N_x + 1$ lignes ($i = 0, 1, \dots, N_x$) et $N_t + 1$ colonnes ($j = 0, 1, \dots, N_t$).



L'équation (*) possède deux inconnues. Il faut donc ajouter une deuxième équation pour pouvoir la résoudre.

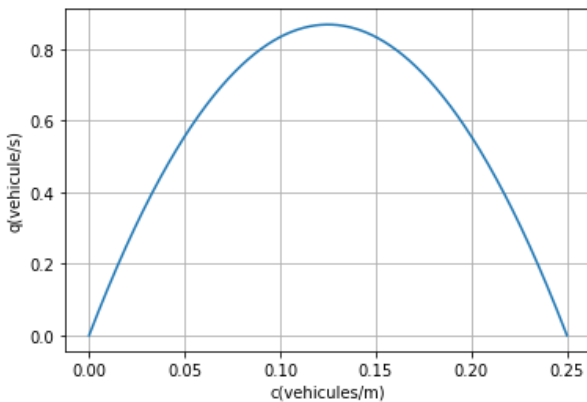
3. Dans le modèle de Greenshield, que l'on utilise dans cette étude, la vitesse $v(x, t)$ est une fonction affine de la concentration $c(x, t)$.

- lorsque la concentration en véhicules tend vers 0, les conducteurs peuvent rouler à la vitesse maximale autorisée notée v_{max}
- lorsque les véhicules sont pare-choc contre pare-choc, la concentration est égale à c_{max} : les véhicules sont à l'arrêt.

Déduire de ces informations, l'expression de $v(x, t)$ en fonction de $c(x, t)$, c_{max} et v_{max} .

4. En déduire l'expression de $q(x, t)$ en fonction de $c(x, t)$. On donne le code suivant et le résultat de son exécution:

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 cmax, L0, vmax= instruction 1
5 |
6 def q(c):
7     return -vmax/cmax*c**2+vmax*c
8
9 c=np.linspace(0,cmax,1000)
10 plt.plot(c,q(c))
11 plt.grid()
12 plt.xlabel('c(vehicules/m)')
13 plt.ylabel('q(vehicule/s)')
14 plt.show()
```



Ecrire sur votre copie l'instruction 1 en exploitant la courbe obtenue.

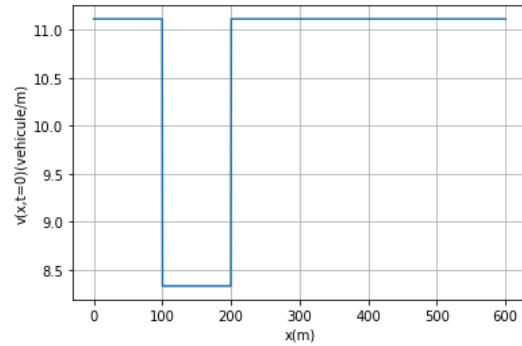
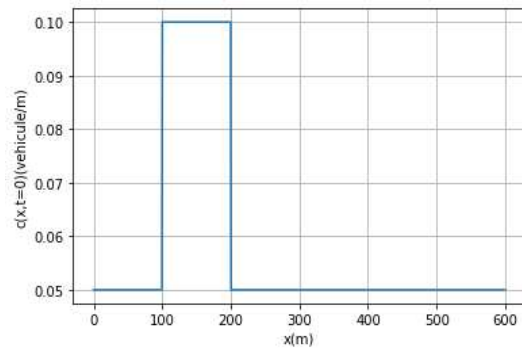
Commenter l'allure de la courbe.

5. On étudie une situation particulière où la concentration de voitures et la vitesse des voitures sur la route à l'instant initial est donnée par le code et les graphes suivants:

```

15 Temps,Lr=60,600
16 Nt,Nx=1000,1000
17 dx=Lr/Nx #pas d'espace
18 dt=Temps/Nt #pas de temps
19 x1,x2= instruction 2
20 C=np.zeros((Nx+1,Nt+1))
21 for i in range(0,Nx+1):
22     if i<x1/dx or i>x2/dx:
23         C[i,0]= instruction 3
24     else:
25         C[i,0]= instruction 4
26
27 x=np.linspace(0,Lr,Nx+1)
28 plt.plot(x,C[:,0])
29 plt.grid()
30 plt.xlabel('x(m)')
31 plt.ylabel('c(x,t=0)(vehicule/m)')
32 plt.show()
33
34 plt.plot(x, instruction 5 )
35 plt.grid()
36 plt.xlabel('x(m)')
37 plt.ylabel('v(x,t=0)(vehicule/m)')
38 plt.show()

```



Déduire de la lecture du code et de la courbe concentration à l'instant initial, les instructions 2, 3 et 4 (à écrire sur votre copie).

Ecrire sur votre copie l'instruction 5.

Commenter les courbes donnant la concentration de voitures et la vitesse des véhicules à l'instant $t = 0$ sur la portion de route étudiée et en déduire la portion de route où le débit de voitures est maximale.

On cherche à étudier l'évolution de la circulation au cours du temps pour les conditions initiales données précédemment en résolvant l'équation (*) (question 2). La méthode de résolution est la méthode d'Euler.

6. Exprimer $\frac{\partial c}{\partial t}(x, t)$ en fonction de $c(x, t + dt)$, $c(x, t)$ et dt . En déduire l'expression de $\frac{\partial c}{\partial t}(x_i, t_j)$ en fonction de $C[i, j + 1]$, $C[i, j]$ et dt .

7. On donne l'expression $\frac{\partial q}{\partial x}(x, t) = \frac{q(x + dx, t) - q(x - dx, t)}{2dx}$.

On associe au débit de voitures $q(x, t)$ un tableau Q tel que $q(x_i, t_j) = Q[i, j]$. Exprimer $\frac{\partial q}{\partial x}(x_i, t_j)$ en fonction de $Q[i + 1, j]$, $Q[i - 1, j]$ et dx .

On complète le code:

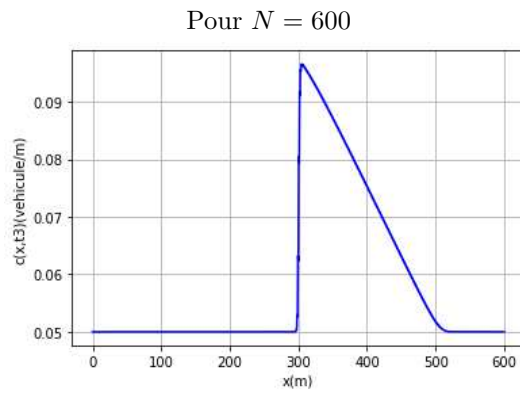
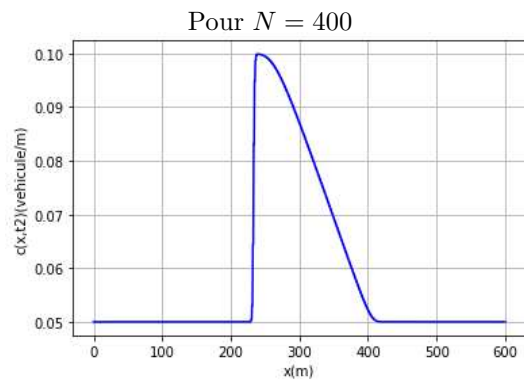
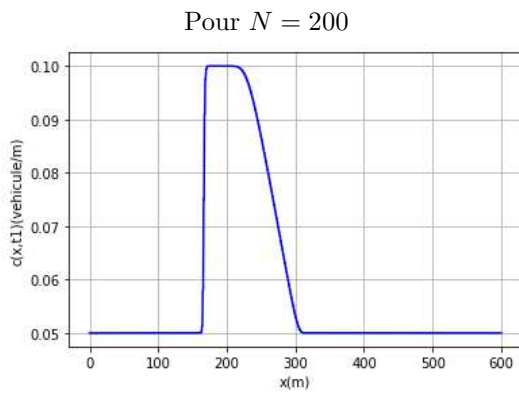
```

40 for j in range(0,Nt):
41     Q= instruction 6
42     for i in range(0,Nx+1):
43         C[i,j+1]= instruction 7
44
45 plt.plot(x,C[:, N ], 'b')
46 plt.grid()
47 plt.xlabel('x(m)')
48 plt.grid()
49 plt.ylabel('c(x,t1)(vehicule/m)')
50 plt.grid()
51 plt.show()

```

8. Ecrire sur votre copie les instructions 6 et 7.

9. L'exécution du code donne les courbes de concentrations de voitures en fonction de x pour différentes valeurs de N .



Déduire du code la valeur numérique de dt et en déduire les instants t_1 , t_2 et t_3 correspondants à ces trois courbes.

Déduire des courbes, la vitesse des voitures à l'avant de la zone de trafic dense. Commenter cette valeur en vous appuyant sur la courbe $v(x, t = 0)$ (question 5).

Comment évolue la zone de forte densité de voitures au cours du temps?

Annexes:

Utilisation de tableaux:

`np.zeros((n,m))`

Description : fonction créant une matrice (tableau) de taille $n \times m$ dont tous les éléments sont nuls.

Argument d'entrée : un tuple de deux entiers correspondant aux dimensions de la matrice à créer.

Argument de sortie : un tableau (matrice) d'éléments de type flottant et égaux à 0.

	Commande	Résultat
Exemple :	<code>np.zeros((3,4))</code>	<code>[[0. 0. 0. 0.]</code>
		<code>[0. 0. 0. 0.]</code>
		<code>[0. 0. 0. 0.]]</code>
		--

`A[i,j]`

Description : fonction qui retourne l'élément numéroté (i, j) de la matrice A. Pour accéder à l'intégralité de la ligne numérotée i de la matrice A, on écrit `A[i, :]`. De même, pour obtenir toute la colonne numérotée j de la matrice A, on utilise la syntaxe `A[:, j]`.

Argument d'entrée : une liste contenant les coordonnées de l'élément dans le tableau A.

Arguments de sortie : l'élément appartenant à la ligne numérotée i et à la colonne numérotée j de la matrice A.

RAPPEL : en langage Python, les lignes d'un tableau A de taille $n \times m$ sont numérotées de 0 à $n-1$ et les colonnes sont numérotées de 0 à $m-1$.

	Commande	Résultat
Exemple :	<code>A=np.array([[3,4,10],[1,8,7]])</code>	
	<code>A[0,2]</code>	10
	<code>A[1,:]</code>	<code>[1 8 7]</code>
	<code>A[:,2]</code>	<code>[10 7]</code>

Pour les graphes:

argument de sortie : un graphique

```
x= np.linspace(3,25,5)
y=sin(x)
plt.plot(x,y,'-b') # tracé d'une ligne bleue continue
plt.title('titre_graphique') # titre du graphe
plt.xlabel('x') # titre de l'axe des abscisses
plt.ylabel('y') # titre de l'axe des ordonnées
plt.show()
```


III. Correction : effet rotation Terre

1. Le référentiel terrestre est galiléen et on néglige tout frottement donc M ne subit que son poids. La RFD appliquée à M s'écrit: $m\vec{a}(M) = m\vec{g}$ soit $\vec{a}(M) = \vec{g}$. On intègre par rapport au temps $\vec{v}(M) = \vec{g}t$ (vitesse initiale nulle) et $\vec{OM} = \vec{g}\frac{t^2}{2}$ (à l'instant initial M se trouve en O).

En projection sur Oz on a $z = -\frac{gt^2}{2}$. M atteint le fond du puits à l'instant t_f tel que $z = -h = -\frac{gt_f^2}{2}$ soit $t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Attention de ne pas changer le sens de Oz dans cette question, il faut respecter l'énoncé, l'axe Oz est vertical ascendant.

2. On a $\vec{\Omega} = -\Omega \cos \lambda \vec{e}_x + \Omega \sin \lambda \vec{e}_z$.

3. Le poids d'un corps est la somme de la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre et de la force centrifuge soit $\vec{P} = m\vec{g}_0 + m\Omega^2 \vec{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles (axe de rotation de la terre) soit $HM = R_T \cos \lambda$.

Soit $\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m} = -g_0 \vec{e}_z + \Omega^2 R_T \cos \lambda (\sin \lambda \vec{e}_x + \cos \lambda \vec{e}_z) = \Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda \vec{e}_x + (-g_0 + \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda) \vec{e}_z$.

La norme du champ de pesanteur s'écrit $\|\vec{g}\| = \sqrt{(\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda)^2 + (-g_0 + \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda)^2}$.

4. Instruction 1: $2 * np.pi/24/3600$ (la Terre fait un tour sur elle même en 24 heures)

La fonction nommée f renvoie la norme du vecteur champ de pesanteur pour la latitude b donnée en degré. La ligne 11 convertit la latitude en radian, $c1$ et $c2$ représentent les composantes du champ de pesanteur sur Ox et Oz .

Resultat1, resultat2 et resultat3 sont donc les normes du champ de pesanteur pour les latitudes $\lambda = 0^0$, soit à l'équateur, $\lambda = 50,9^0$, latitude où se déroule l'expérience et $\lambda = 90^0$, soit au pôle nord. C'est à l'équateur que l'on est le plus léger car la force d'inertie d'entraînement y est maximale, c'est là où l'on se trouve le plus loin de l'axe de rotation de la Terre. C'est aux pôles que l'on est le plus lourd car la force d'inertie d'entraînement y est nulle.

La variation relative du champ de pesanteur entre l'équateur et le pôle est $\frac{9,813 - 9,779}{9,813} = 0,3 \%$. Cela signifie que l'on peut négliger la force d'inertie d'entraînement devant la force d'attraction de la Terre et que $\vec{P} = m\vec{g}_0$.

5. Dans le référentiel terrestre non galiléen, M subit son poids $\vec{P} = -mg_0 \vec{e}_z$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ (on néglige les frottements). La RFD s'écrit: $m\vec{a} = -mg_0 \vec{e}_z - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ soit en simplifiant par m :

$\vec{a} = -g_0 \vec{e}_z - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$: par identification avec l'énoncé on lit $\alpha = -g_0$ et $\beta = -2$.

6. $\Omega \wedge \vec{v} = (-\Omega \cos \lambda \vec{e}_x + \Omega \sin \lambda \vec{e}_z) \wedge (-g_0 t \vec{e}_z) = -\Omega \cos \lambda g_0 t \vec{e}_y$.

On a donc $\vec{a} = -g_0 \vec{e}_z + 2\Omega \cos \lambda g_0 t \vec{e}_y$.

On projette sur Ox : $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = 0$ et $x = 0$

On projette sur Oy : $\ddot{y} = 2\Omega \cos \lambda g_0 t$, $\dot{y} = \Omega \cos \lambda g_0 t^2 + 0$ et $y = \Omega \cos \lambda g_0 \frac{t^3}{3} + 0$

On projette sur Oz : $\ddot{z} = -g_0$, $\dot{z} = -g_0 t + 0$ et $z = -\frac{g_0 t^2}{2} + 0$

On exprime le temps $t = \sqrt{\frac{-2z}{g_0}}$ et on le remplace dans l'expression de y pour obtenir l'équation de la trajectoire: $y = \Omega \cos \lambda \frac{g_0}{3} \left(\frac{-2z}{g_0}\right)^{3/2} > 0$: M est dévié vers l'est.

7.

7.a. Instruction 2: $lat = 50.9 * np.pi/180$

Instruction 3: $tf=(2*h/g0)**0.5$ (d'après la question 1)

ligne 23: $vecOmega=np.array([-d1,0,d2])$ car $\vec{\Omega} = -\Omega \cos \lambda \vec{e}_x + \Omega \sin \lambda \vec{e}_z$

ligne 24: $vecg=np.array([0,0,-g0])$ car $\vec{g} = -g_0 \vec{e}_z$

ligne 30: `vecPos[0,:]=np.array([0,0,0]):` M se trouve initialement en O

ligne 31: `vecVit[0,:]=np.array([0,0,0]):` M a une vitesse initiale nulle

7.b. $\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + \frac{d\vec{v}}{dt}dt = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)dt$ (cette relation de récurrence permet de remplir la ligne 39).

$$\overrightarrow{OM}(t+dt) = \overrightarrow{OM}(t) + \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}dt = \overrightarrow{OM}(t) + \vec{v}(t)dt$$

Instruction 4: `vecPos[i+1,:]=vecPos[i,:]+vecVit[i,:]*dt`

7.c. `vecPos[:,0]` représente les valeurs de x aux différents instants donc la courbe 1 est $x(t)$.

De même `vecPos[:,1]` représente les valeurs de y donc la courbe 2 est $y(t)$.

`vecPos[:,2]` représente les valeurs de z donc la courbe 3 est $z(t)$.

Sur la courbe 3 on lit $t \approx 4,5$ s pour $z = -100$ m. Sur la courbe 2, on lit $y = 0,013$ m = 1,3 cm à l'instant $t = 4,5$ s: c'est positif donc M est dévié vers l'est. Sur la courbe 1 on lit $1,7 \cdot 10^{-6}$ m = 1,7 μ m (attention, sur le graphe sur l'axe des ordonnées il y a un $\times 10^{-6}$) pour $t = 4,5$ s: M est donc aussi dévié vers le sud mais cette déviation est négligeable devant celle selon Oy . Ainsi à cause de la rotation de la Terre, M ne tombe pas à la verticale du lieu, M est dévié vers l'est lors de la chute libre.

8.

8.a. Instruction 5: `g0*np.cos(lat)*Omega/3*(-2*z/g0)**1.5` (d'après la question 6)

8.b. Instruction 6: `y=traj(z)`

Instruction 7: `y,z` pour mettre y en abscisse et z en ordonnée

Instruction 8: `vecPos[:,1],vecPos[:,2]`

8.c. Le pas de temps dans la méthode d'Euler est défini dans le code par `dt=tf/N`. Ainsi plus le nombre d'itérations est grand et plus le pas de temps est petit. Or la méthode d'Euler repose sur des DL donc la précision des simulations sera d'autant meilleure que le pas `dt` à la base des DL sera petit.

C'est ce que l'on observe sur les courbes. Pour $N=100$, `dt` est très petit, et les courbes théoriques et approchées par la méthode d'Euler se superposent. Pour $N=50$ et $N=10$, les courbes théoriques et approchées par Euler ne sont pas superposées, la méthode d'Euler ne donne pas un résultat satisfaisant.

On peut cependant faire la remarque que la méthode théorique est elle aussi une méthode approchée puisque l'on a estimé la force de Coriolis avec la vitesse obtenue en référentiel galiléen. Mais finalement pour N grand, les deux méthodes sont cohérentes, ce qui justifie finalement l'estimation faite pour la force de Coriolis.

IV. Exercice II: circulation

1. On peut utiliser les unités des grandeurs concernées:

$$[v] = m.s^{-1}, [c] = vehicules.m^{-1} \text{ et } [q] = vehicules.s^{-1}$$

On en déduit la relation $q(x,t) = v(x,t)c(x,t)$.

2. On considère le système élémentaire compris entre x et $x+dx$:

Nombre de voitures dans le système à l'instant t : $N(t) = c(x,t)dx$

Nombre de voitures dans le système à l'instant $t+dt$: $N(t+dt) = c(x,t+dt)dx$

Nombre de voitures qui entrent dans le système entre t et $t+dt$: $\delta N_e = q(x,t)dt$

Nombre de voitures qui sortent du système entre t et $t+dt$: $\delta N_s = q(x+dx,t)dt$

La conservation du nombre de voitures s'écrit $N(t+dt) = N(t) + \delta N_e - \delta N_s$ soit $(c(x,t+dt) - c(x,t))dx = -(q(x+dx,t) - q(x,t))dt$ soit en faisant des DL à l'ordre 1 en dx et en dt : $\frac{\partial c}{\partial t}dxdt = -\frac{\partial q}{\partial x}dxdt$ soit $\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$.

3. L'énoncé indique que la vitesse est une fonction affine de la concentration, la vitesse est donc de la forme $v(x,t) = ac(x,t) + b$ avec:

$$v(x,t) = v_{max} = b \text{ (pour } c = 0)$$

$$v(x,t) = 0 = ac_{max} + b \text{ (pour } c = c_{max} \text{ les véhicules sont à l'arrêt)}$$

$$\text{On a donc } v(x,t) = -\frac{v_{max}}{c_{max}}c(x,t) + v_{max}.$$

4. On a donc $q(x, t) = v(x, t)c(x, t) = -\frac{v_{max}}{c_{max}}c^2(x, t) + v_{max}c(x, t)$.

La courbe est tracée pour c variant de 0 à $c_{max} = 0,25 \text{ m.s}^{-1}$ et c'est une parabole.

D'après l'énoncé $L_0 = \frac{1}{c_{max}} = 4 \text{ m}$.

Pour trouver v_{max} on peut utiliser un point particulier de la courbe, par exemple le maximum de cette fonction qui a pour abscisse $c = \frac{c_{max}}{2} = 0,125 \text{ vehicule.m}^{-1}$, pour cet abscisse l'ordonnée est $q_{max} = -\frac{v_{max}}{c_{max}}\frac{c_{max}^2}{4} + v_{max}\frac{c_{max}}{2} = \frac{v_{max}c_{max}}{4} = 0,85 \text{ vehicules.s}^{-1}$. Soit $v_{max} = \frac{4q_{max}}{c_{max}} = 13,6 \text{ m.s}^{-1}$.

Le débit est nul lorsque la concentration est faible, et le débit est nul également lorsque la concentration en voiture est grande car dans ce cas, les voitures sont trop nombreuses, il y a un bouchon, elles sont à l'arrêt. Le débit présente un maximum lorsque la concentration est égale à $c_{max}/2$, il n'y a pas trop de voitures donc elles peuvent rouler assez vite.

5. La route présente une zone de circulation très dense comprise entre $x_1 = 100 \text{ m}$ et $x_2 = 200 \text{ m}$. La concentration de voitures dans cette zone est de $0,1 \text{ vehicules.m}^{-1}$. Avant cette zone et après cette zone, le trafic est moins dense la concentration est de $0,05 \text{ vehicules.m}^{-1}$. La longueur de la route est $Lr = 600 \text{ m}$.

instruction 2: 100, 200

instruction 3: 0.05 c'est c pour $x < x_1$ et $x > x_2$

instruction 4: 0.1 c'est c pour $x_1 < x < x_2$

Comme on peut s'y attendre, c'est dans la zone où la concentration de voitures est plus grande que la vitesse des voitures est plus faible.

Le débit de voitures est de $0,1.8,3 = 0,83 \text{ vehicules/s}$ dans la zone de forte concentration et de $0,05.11,2 = 0,56 \text{ vehicules/s}$ dans la zone de faible concentration. Le débit de voitures est donc plus important dans la zone de forte concentration. Il faut calculer le débit pour répondre à la question car q dépend de c et de v .

6. On a $\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) = \frac{c(x, t + dt) - c(x, t)}{dt}$ soit $\frac{\partial c}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{c(x_i, t_{j+1}) - c(x_i, t_j)}{dt} = \frac{C[i, j + 1] - C[i, j]}{dt}$.

7. On a $\frac{\partial q}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{q(x_{i+1}, t_j) - q(x_{i-1}, t_j)}{2dx} = \frac{Q[i + 1, j] - Q[i - 1, j]}{2dx}$.

8. On remplace dans l'équation $\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial c}{\partial t}$ soit $\frac{C[i, j + 1] - C[i, j]}{dt} = \frac{Q[i + 1, j] - Q[i - 1, j]}{2dx}$ d'où $C[i, j + 1] = C[i, j] + \frac{dt}{2dx}(Q[i + 1, j] - Q[i - 1, j])$.

9. L'instruction 6 définit le tableau Q par: $Q = -C * 2 * v_{max}/c_{max} + v_{max} * C$

La relation de récurrence permet de compléter l'instruction 7: $C[i, j + 1] = C[i, j] + (Q[i + 1, j + 1] - Q[i - 1, j]) * dt/2/dx$.

Le pas de temps est $dt = \frac{Temps}{Nt} = \frac{60}{1000} = 60 \text{ ms}$.

Pour $N = 200$, $t_1 = 200dt = 12\,000 \text{ ms} = 12 \text{ s}$.

Pour $N = 400$, $t_2 = 24 \text{ s}$ et pour $N = 600$, $t_3 = 36 \text{ s}$.

L'avant de la zone de forte concentration de voitures se trouve en $x = 200 \text{ m}$ à $t = 0 \text{ s}$, en $x = 300 \text{ m}$ à $t = 12 \text{ s}$, en $x = 400 \text{ m}$ à $t = 24 \text{ s}$ et en $x = 400 \text{ m}$ à $t = 36 \text{ s}$. La vitesse des voitures est donc de $\frac{100}{12} = 8,3 \text{ m.s}^{-1}$, c'est la vitesse initiale des voitures dans la zone de forte concentration.

La zone de forte concentration de voitures est de plus en plus large (100 m à $t = 0 \text{ s}$ pour 200 m à $t = 36 \text{ s}$) et la concentration maximale de voitures diminue au cours du temps. Au cours du temps les voitures s'éloignent les unes des autres et la zone de forte concentration avance. La circulation se fluidifie.