

Chapitre EM12: révisions d'induction

I. Les lois et les prévisions des phénomènes

Loi de Lenz : les phénomènes d'induction s'opposent par leurs effets, aux causes qui leur ont donné naissance.

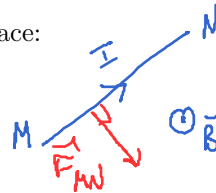
Loi de Faraday : $\mathcal{e} = -\frac{d\phi}{dt}$ où $\mathcal{e}$ est la fem induite exprimée en V et $\phi = \iint \vec{B}(M) \cdot dS \vec{n}(M)$ est le flux du champ magnétique à travers le circuit **orienté** (ϕ est en $T.m^2 = Wb$: Wb désigne le Weber). Le circuit est orienté par le sens du courant i et on déduit $\vec{n}$ du sens de i et de la règle de la main droite.

Dans un circuit fermé, la fem induite crée un courant induit dans le même sens que la fem induite.

Pour prévoir de façon qualitative le sens de la fem induite et donc du courant induit, on peut procéder de deux façons différentes qui dépendent de la situation étudiée:

- La première façon de raisonner repose sur la force de Laplace:

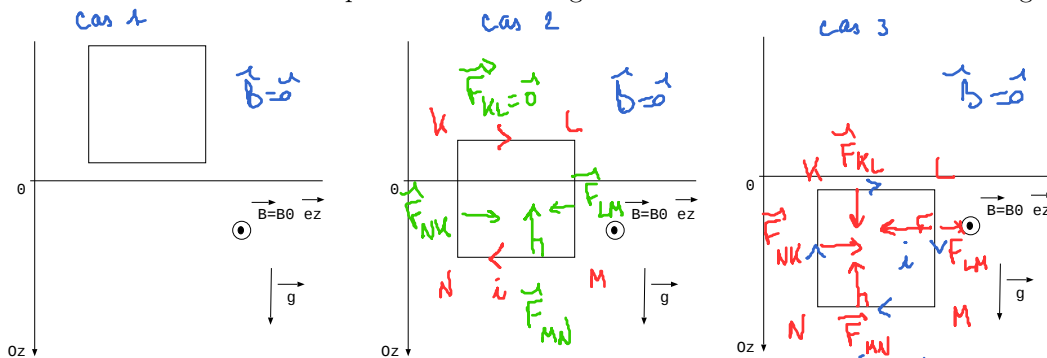
appel. force exercée sur une portion de circuit rectiligne dans un champ $\vec{B}$ uniforme



$$\vec{F}_{MN} = I \vec{MN} \wedge \vec{B}$$

Le sens du courant induit est tel qu'il crée une force de Laplace qui provoque un mouvement qui s'oppose au mouvement initial du système.

Exemple : chute d'un cadre : le champ est nul dans la région $z < 0$ et il est uniforme dans la région $z > 0$.



Le cadre tombe sous l'action de son poids, le cadre est alors le siège d'un courant induit dont le sens est tel que la force de Laplace résultante sur le cadre est dans le sens opposé au poids.

Cas 1 : il n'y a pas de champ $\vec{B}$ pour $z < 0$ donc pas de courant induit

Cas 3 : le cadre est entièrement plongé dans le champ $\vec{B}$ uniforme, si le cadre est parcouru par un courant les forces de Laplace se compensent $\Rightarrow$ pas de courant induit

Cas 2 : $\vec{F}_{KL} = \vec{0}$ car $\vec{B}$ est nul sur le côté KL
 $\vec{F}_{NK}$ et $\vec{F}_{LM}$ se compensent
 la résultante des forces de Laplace est égale à $\vec{F}_{MN}$, on en déduit le sens de i pour que $\vec{F}_{MN}$ soit opposé à $\vec{g}$

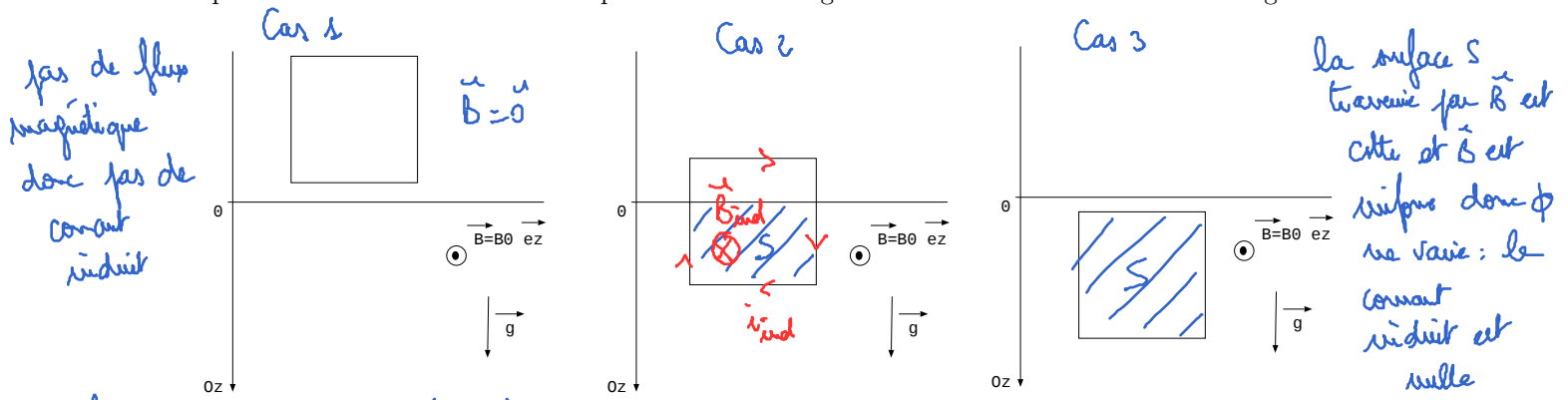
- La seconde façon de raisonner repose sur le flux : le flux est le produit du champ magnétique B extérieur avec la surface du circuit plongé dans ce champ B . Ce flux peut varier car le champ extérieur varie ou car la surface du circuit varie. Il apparaît alors un courant induit dans le circuit qui crée un champ induit:

le sens de $\vec{B}$ induit se déduit du sens de i induit par la règle de la main droite



Le sens du champ magnétique induit est tel qu'il va **s'opposer aux variations de flux**.

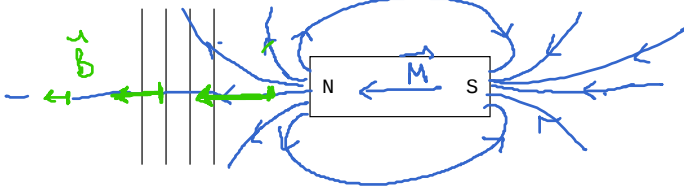
Exemple 1 : chute d'un cadre : le champ est nul dans la région $z < 0$ et il est uniforme dans la région $z > 0$.



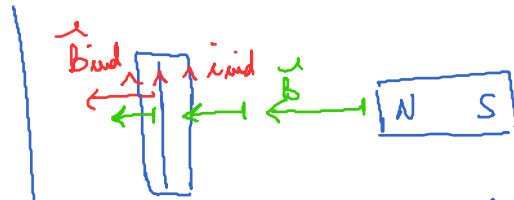
Le cadre tombe sous l'action de son poids.

Dans le cas 2, la surface S traversée par le champ magnétique est de + en + grande donc le flux (en valeur absolue) augmente. Pour s'opposer à cette augmentation, le champ magnétique total : $\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B} + \vec{B}_{\text{ind}}$ doit être de + en + petit. Donc $\vec{B}_{\text{ind}}$ est dans le sens opposé à $\vec{B}$. On en déduit i_{ind} de la règle de la main droite.

Exemple 2 : on éloigne l'aimant de la bobine



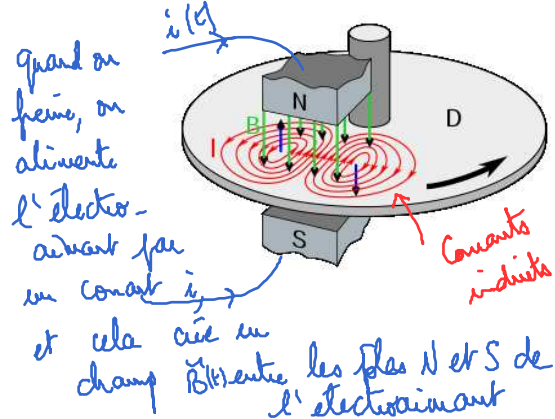
Les lignes de champ magnétique créées par un aimant vont du pôle nord vers le pôle sud. Lorsque ces lignes sont proches $\vec{B}$ est intense, lorsqu'elles sont éloignées $\vec{B}$ est faible.



quand on éloigne l'aimant, le champ $\vec{B}$ dans la bobine est de + en + faible donc le flux (en valeur absolue) dans la bobine diminue, pour compenser cette diminution $\vec{B}_{\text{ind}}$ doit être dans le sens de $\vec{B}$. On déduit de $\vec{B}_{\text{ind}}$ et de la règle de la main droite le sens de i_{ind} .

Exemple 3 : freinage par induction

Le freinage des camions s'effectue grâce aux courants de Foucault (courants induits). Ce dispositif de freinage comprend un électroaimant (ce système se comporte comme un aimant uniquement lorsqu'il est alimenté par un courant électrique) et d'un disque conducteur du courant électrique solidaire de la roue. Ce type de freinage ne peut être que complémentaire à un freinage classique, car lorsque la roue est ralentie, les courants de Foucault diminuent. A l'arrêt ce dispositif de freinage ne fonctionne pas.



Le disque tourne et est traversé par un champ magnétique, cela crée un flux magnétique variable donc il apparaît dans le disque des courants induits (d'où la nécessité que le disque conduise le courant). Ces courants sont tels qu'ils s'opposent au phénomène qui leur a donné naissance : le disque ralentit.

II. Circuit mobile dans un champ magnétique permanent

Quand on commence un exercice d'induction, on commence par prévoir de façon qualitative le sens du courant induit dans le circuit.

On choisit un sens d'orientation pour i dans le circuit (ce sens est soit donné par l'énoncé, soit prévu par vous par une étude qualitative, soit choisi par vous aléatoirement). On déduit du sens de i le vecteur normal $\vec{n}$ en appliquant la règle de la main droite.

On calcule le flux du champ magnétique dans le circuit : $\phi = \iint \vec{B} \cdot dS \vec{n}$.

On en déduit la fem induite par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt}$.

On représente le montage électrique équivalent dans lequel on met en série:



- un générateur de tension de fem égale à $e = -\frac{d\phi}{dt}$, la flèche de e doit être dans le même sens que i .

- en fonction de l'énoncé : une résistance R , une condensateur de capacité C ,... et d'autres éléments éventuels...

On écrit l'équation électrique (loi des mailles). On constate, et on écrit que: l'équation électrique contient un terme mécanique (vitesse).

Remarque: Si on trouve $i > 0$: cela signifie que la fem induite et le courant induit sont réellement dans le sens choisi ou si on trouve $i < 0$: cela signifie que la fem induite et le courant induit sont réellement dans le sens opposé au sens choisi.

On calcule la résultante des forces de Laplace. Sur un circuit rectiligne $\overrightarrow{MN}$ (orienté dans le sens de parcours choisi) parcouru par un courant i et placé dans le champ B , elle s'écrit : $\vec{F} = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$.

En cas de rotation, on calcule le moment (ou le couple) des forces de Laplace, c'est $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ où $\vec{M} = IS \vec{n}$ est le moment dipolaire de la boucle de courant formé par le circuit.

On en déduit l'équation mécanique en appliquant la RFD dans le cas où la partie mobile translate ou en appliquant le théorème du moment cinétique dans le cas où la partie mobile est en rotation. On constate et on écrit que l'équation mécanique contient un terme électrique (le courant).

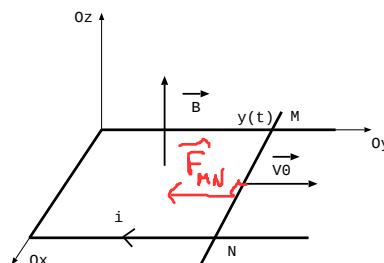
On résout le système d'équations couplées qui nous permet généralement de trouver une équation différentielle vérifiée par i , v ou ω .

Du point de vue énergétique, on a toujours: $P_{laplace} + P_{fem} = 0$ avec:

- $P_{fem} = e.i$: e et i sont en convention générateur
- $P_{laplace} = \vec{F}_{laplace} \cdot \vec{v}$ (translation) ou $\vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}$ (rotation).

Exercice 1 :

Une tige MN , de masse m et de longueur l , glisse sans frottement sur deux rails conducteurs. On repère sa position par la variable $y(t)$. Le circuit fermé par la tige a pour résistance totale R , on néglige les phénomènes d'auto-induction. La tige est initialement animée d'une vitesse $\vec{v}_0$. Le sens choisi pour i est indiqué sur le schéma

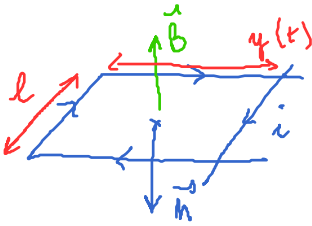


Prévoir le sens du courant induit et donc le signe de i .

Le courant induit qui apparaît dans le circuit fait que la tige MN subit la force de Laplace, cette force doit être dans le sens opposé à $\vec{v}_0$ avec $\vec{F}_{MN} = i_{ind} \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$
 > 0 pour que $\vec{F}_{MN}$ soit dans le sens opposé à $\vec{v}_0$
 donc $i > 0$

Déduire de l'équation électrique et de l'équation mécanique, l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v(t)$ de la tige et la résoudre pour $v(t=0) = v_0$. Calculer l'énergie perdue par effet Joule au cours du mouvement de la tige. Commenter.

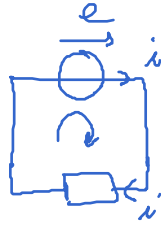
Recherche de l'équation électrique : $\vec{B}$ et $\vec{m}$ de sens opposé



$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = -B l y(t)$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = B l \dot{y}(t) = B l v \quad \text{d'après la loi de Faraday}$$

Circuit électrique équivalent :



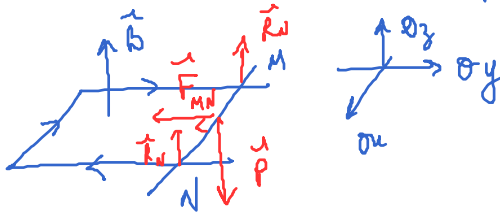
loi des mailles : $e - Ri = 0$

$$\text{soit } \boxed{B l v = Ri}$$

l'éq. électrique
contient le terme
mécanique v

Recherche de l'éq. mécanique :

la barre MN suit : son poids, la force de Laplace, la réaction des rails



on écrit la RFD appliquée à la barre :

$$m \frac{dv}{dt} = \underbrace{\vec{P} + \vec{R}_N}_{\text{forces verticales qui se compensent}} + \vec{F}_{MN}$$

$$\vec{F}_{MN} = i l \vec{e}_N \wedge B \vec{e}_y = -i l B \vec{e}_y$$

$$\text{d'où sur } (Oy) : \boxed{m \frac{dv}{dt} = -i l B}$$

l'éq. mécanique
contient le terme
électrique i

d'où le système d'éq. couplées à résoudre :

$$\begin{cases} B l v = Ri \\ m \frac{dv}{dt} = -i l B \end{cases}$$

$$\text{soit } \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{m R} v = 0$$

$$\text{on pose : } \tau = \frac{m R}{B^2 l^2}$$

la barre ralentit et s'arrête

$$\text{soit } v(t) = A e^{-t/\tau}$$

$$v(t=0) = v_0 = A$$

$$\text{donc } \boxed{v(t) = v_0 e^{-t/\tau}}$$

$$\text{La puissance perdue par effet Joule est : } \mathcal{P} = Ri^2 = R \left(\frac{B l v}{R} \right)^2 = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R} e^{-2t/\tau}$$

$$\text{On en déduit l'énergie : } E_{\text{Joule}} = \int_0^\infty \mathcal{P} dt = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt$$

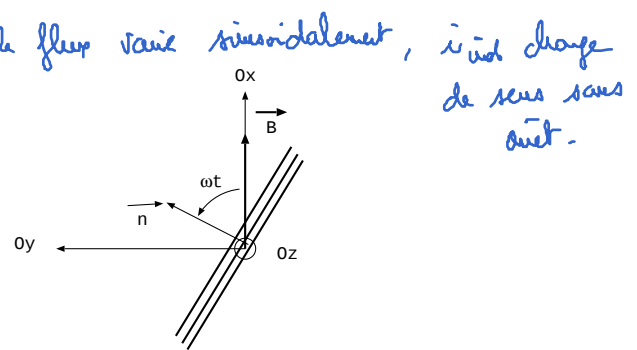
$$E_{\text{Joule}} = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^\infty = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R} \times \frac{\tau}{2} = \frac{m v_0^2}{2}$$

on reconnaît l' E_c
initiale de la tige

L'induction freine la barre, qui finit par s'arrêter. L'énergie cinétique initiale de la barre est entièrement perdue sous forme de chaleur dans la résistance.

Exercice 2:

Une dynamo montée sur un vélo est constituée d'une bobine de N spires de rayon a . Cette bobine a pour résistance R . On néglige les effets de l'induction propre. On se place en régime permanent, la bobine tourne autour de Oz à la vitesse angulaire constante $\omega = \omega \vec{e}_z$ (cette vitesse est assurée par le cycliste qui pédale à vitesse constante). La liaison pivot est supposée idéale. La bobine est placée dans une zone de champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$ uniforme.



On ne précise pas le sens de i_{ind} car le flux varie sinusoidalement, i_{ind} change de sens sans arrêt.

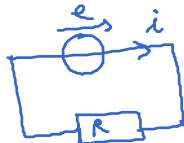
Déterminer l'expression de la fem induite e . En déduire l'intensité i du courant induit et la puissance moyenne électrique fournie par la dynamo.

Exprimer le moment magnétique de la bobine et en déduire le couple magnétique qui s'exerce sur elle (on rappelle que le couple des forces de Laplace s'écrit $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$). Exprimer la puissance mécanique injectée dans la dynamo pour la faire tourner et calculer sa valeur moyenne. Commenter.

$$\phi = N \times \vec{B} \cdot \vec{S} \vec{m} = N \times B \cos(\omega t) \pi a^2$$

$$\text{loi de Faraday : } e = - \frac{d\phi}{dt} = NB\pi a^2 \omega \sin(\omega t)$$

Circuit électrique équivalent :



loi des mailles : $e = Ri$

$$\text{soit } i = \frac{NB\pi a^2 \omega \sin(\omega t)}{R}$$

la dynamo se comporte comme un générateur qui fournit la puissance électrique :

$$P_{el} = e i = \frac{N^2 B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

$$\text{soit en moyenne au cours du temps : } \langle P_{el} \rangle = \frac{1}{2} \frac{N^2 B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{R}$$

La bobine possède le moment dipolaire : $\vec{M} = i S \vec{m} \times N = i \pi a^2 N \vec{m}$

d'où le couple qu'elle subit :

$$= i \pi a^2 N (\cos(\omega t) \vec{e}_u + \sin(\omega t) \vec{e}_y)$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = i \pi a^2 N (\cos(\omega t) \vec{e}_u + \sin(\omega t) \vec{e}_y) \wedge B \vec{e}_u = -i \pi a^2 N B \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

$$\text{soit } \vec{\Gamma} = - \frac{N^2 \pi^2 a^4 B^2}{R} \omega \sin^2(\omega t) \vec{e}_y \quad (\text{couple de freinage selon } -\vec{e}_y)$$

$$\text{la puissance de cette force est : } P_{\text{Lap}} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} = - \frac{N^2 \pi^2 a^4 B^2 \omega^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

$$\text{en moyenne } \langle P_{\text{Lap}} \rangle = - \frac{N^2 \pi^2 a^4 B^2 \omega^2}{2R} < 0$$

$$\text{On a bien : } P_{\text{Laplace}} + P_{\text{fem}} = 0$$

qui signifie que le courant induit provoque le freinage de la roue ($P_{\text{Lap}} < 0$) et crée une puissance électrique qui peut servir à alimenter une ampoule.

III. Auto-induction

1. Description du phénomène

Dans les exercices précédents, le phénomène d'induction se produit dans des circuits placés dans un champ magnétique extérieur noté $\vec{B}$ (à noter que l'exercice indique la présence de ce champ magnétique mais ne précise pas comment il est créé).

Le phénomène d'induction génère un courant induit qui crée un champ magnétique induit.

Le champ magnétique résultant est donc:

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B} + \vec{B}_{\text{ind}}$$

Ce champ crée un flux total à travers le circuit: $\Phi = \underbrace{\iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \vec{n}}_{\text{flux du champ extérieur à travers le circuit}} + \underbrace{\iint \vec{B}_{\text{ind}} \cdot d\vec{S} \vec{n}}_{\text{flux propre}}$

Le flux du champ magnétique induit créé par le courant induit dans le circuit lui-même s'appelle le flux propre. Le champ magnétique induit est proportionnel au courant induit i qui le crée donc le flux propre est proportionnel au courant induit, on l'écrit:

$$\Phi_{\text{propre}} = \iint \underbrace{\vec{B}_{\text{ind}}}_{\substack{\text{champ créé par } i_{\text{ind}} \\ \text{donc proportionnel à } i_{\text{ind}}}} d\vec{S} \vec{n} = L i_{\text{ind}}$$

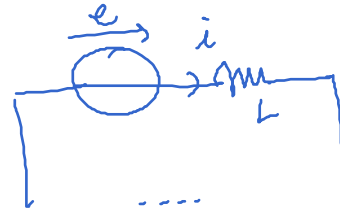
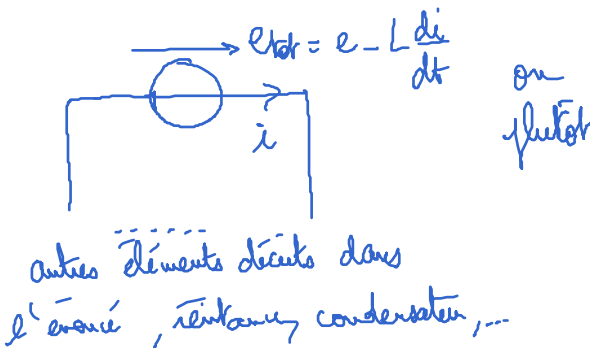
L est le coeff. de proportionnalité entre Φ et i_{ind} , L toujours > 0 , est appelé l'inductance $[L] = H$

La loi de Faraday donne:

$$e_{\text{tot}} = - \frac{d\Phi_{\text{tot}}}{dt} = - \underbrace{\frac{d\Phi}{dt}}_e - \frac{d\Phi_{\text{propre}}}{dt} = e - L \frac{di}{dt}$$

tension aux bornes d'une bobine en convention générateur (ici e et i de in sens)

On en déduit le circuit électrique équivalent:



avec $e = - \frac{d\Phi}{dt}$
et $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \vec{n}$
Contribution du champ extérieur

On peut être amené à négliger le phénomène d'auto-induction ce qui revient à négliger le flux propre du champ magnétique induit créé par le circuit à travers lui-même, cela revient à négliger l'inductance du circuit.

Le schéma électrique équivalent est:

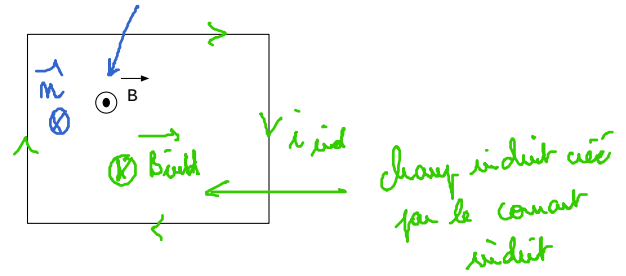


2. Exemples de calculs d'inductance d'un circuit

L'inductance d'un circuit est notée L exprimée en Henry. On la trouve par deux méthodes différentes:

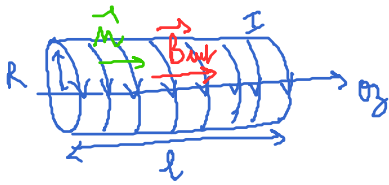
- On calcule le flux propre: $\phi = \iint \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} \vec{n}(M) = Li$. Le circuit est parcouru par le courant d'intensité i , il crée donc un champ magnétique $\vec{B}$ dont on calcule le flux à travers le circuit qui a créé la champ.

champ extérieur créé par un dipôle non déduit



- Partout où il y a un champ magnétique, il y a de l'énergie magnétique. On note $u_m(M) = \frac{B^2(M)}{2\mu_0}$ la densité volumique d'énergie magnétique en M (u_m est en $J.m^{-3}$). On exprime le champ magnétique $\vec{B}$ créé par le circuit parcouru par un courant i et on en déduit l'énergie magnétique présente dans le circuit soit $U_m = \iiint u_m(M) d\tau(M) = \frac{Li^2}{2}$.

Exemple 1 : inductance d'un solénoïde de rayon R , de longueur $l \gg R$ et comportant N tours de fil:



$$\vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{B}_{int} = \frac{\mu_0 N I}{l} \vec{e}_y$$

le champ magnétique est homogène (ou presque) à l'intérieur du solénoïde.

$$\Phi = \iint \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \underbrace{\vec{B}_{int} \cdot \pi R^2}_{\substack{\text{flux à travers} \\ \text{1 spire}}} \times N = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l} I = L I$$

$\vec{n}$ et $\vec{B}_{int}$ sont dans le m même sens

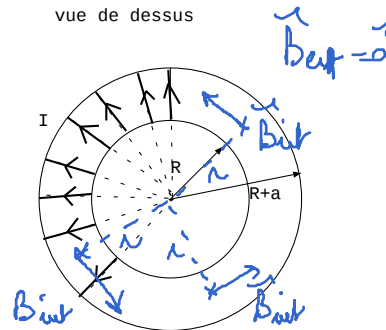
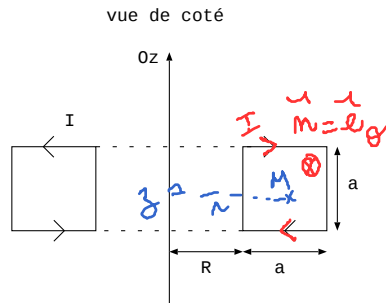
d'où l'inductance du solénoïde : $L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l}$

$$U_m = \iint \frac{B^2(M)}{2\mu_0} d\tau(M) = \frac{B_{int}^2}{2\mu_0} \underbrace{\iint d\tau}_{\substack{\text{volume} \\ \pi R^2 \times l}} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2l} \pi R^2 l = \frac{1}{2} L I^2$$

d'où $L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{l}$

$\underline{\underline{Rq}}$ L de la forme $\mu_0 \times \text{longueur}$

Exemple 2 : inductance d'un tore: on montre que le champ magnétique à l'extérieur du tore est nul et dans le tore s'écrit: $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.



On calcule le flux de $\vec{B}$ à travers 1 spire:

$$\Phi_{1 \text{ spire}} = \iint \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \iint \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \cdot d\vec{S} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \times \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} \times \int_0^a dy$$

un point M sur la spire est repéré par r et z soit $dS = dr dy$

$$\Phi_{N \text{ spires}} = \Phi_{1 \text{ spire}} = N \times \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) a = L I$$

d'où $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{R}\right)$

On calcule l'énergie magnétique dans le tore: $\underline{\underline{Rq}}$ L de la forme $\mu_0 \times \text{longueur}$

$$U_m = \iint \frac{B^2(M)}{2\mu_0} d\tau(M) = \iint \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{4\pi^2 r^2} \times \frac{1}{2\mu_0} \times dr \times r d\theta \times dz$$

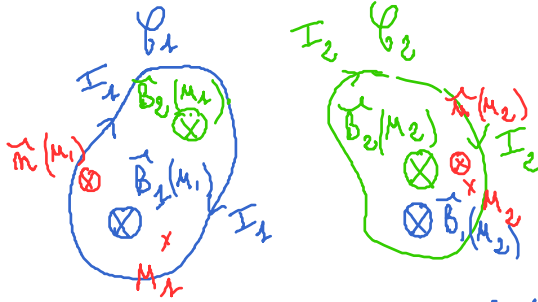
$$U_m = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2} \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a dz = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) 2\pi a = \frac{1}{2} L I^2$$

d'où $L = \dots$

IV. Inductance mutuelle

Soit un circuit C_1 parcouru par un courant d'intensité I_1 , ce circuit crée dans l'espace un champ magnétique $\vec{B}_1$ proportionnel à I_1 .

Soit un circuit C_2 parcouru par un courant d'intensité I_2 , ce circuit crée dans l'espace un champ magnétique $\vec{B}_2$ proportionnel à I_2 .



On peut définir plusieurs flux du champ magnétique:

- Le flux ϕ_1 de $\vec{B}_1$ à travers C_1 s'appelle le flux propre, il s'écrit $\phi_{p1} = L_1 I_1$ où L_1 est l'inductance de C_1

- Le flux ϕ_2 de $\vec{B}_2$ à travers C_2 s'appelle le flux propre, il s'écrit $\phi_{p2} = L_2 I_2$ où L_2 est l'inductance de C_2

- Le flux $\phi_{1 \rightarrow 2}$ de $\vec{B}_1$ à travers C_2 , il s'écrit $\phi_{1 \rightarrow 2} = M I_1$

- Le flux $\phi_{2 \rightarrow 1}$ de $\vec{B}_2$ à travers C_1 , il s'écrit $\phi_{2 \rightarrow 1} = M I_2$

M s'appelle le coefficient d'inductance mutuelle, son signe dépend de l'orientation des courants dans les circuits (M peut être négative alors que L_1 et L_2 sont toujours positives).

Unité: $[L] = [M] = H$

La loi de Lenz s'écrit: $e = - \frac{d\phi}{dt}$

pour le circuit C_1 :

$$e_1 = - \frac{d}{dt} (\phi_{p1} + \phi_{2 \rightarrow 1})$$

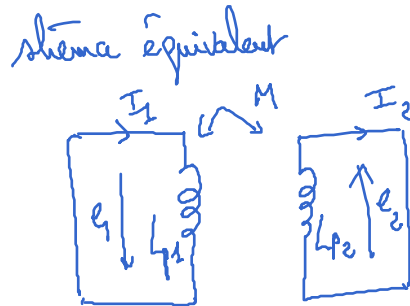
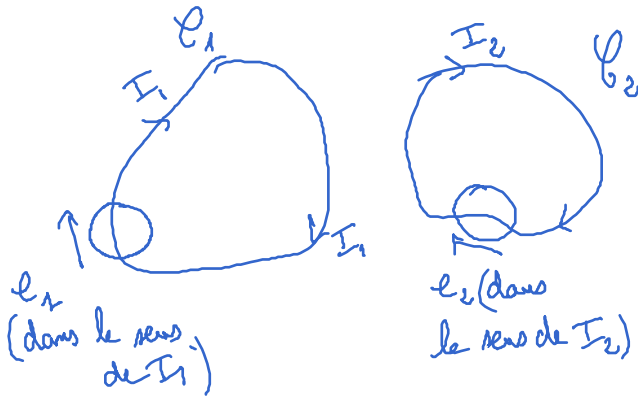
$$= - L \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$

pour le circuit C_2 :

$$e_2 = - \frac{d}{dt} (\phi_{p2} + \phi_{1 \rightarrow 2})$$

$$= - L \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

Le circuit électrique équivalent est:



Conclusion

Dans la loi de Lenz: $e = - \frac{d\phi}{dt}$, ϕ désigne le flux du champ magnétique à travers le circuit C étudié parcouru par le courant I . Le champ magnétique total qui traverse le circuit est la somme:

- du champ créé par le circuit lui même soit $\phi_p = LI$

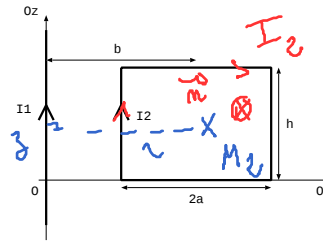
- d'un éventuel champ extérieur donné par l'énoncé et dont l'origine n'est pas spécifié soit $\phi_{ext} = \iint \vec{B}_{ext} dS \vec{n}$ (ce flux n'est pas proportionnel à un courant, il est proportionnel à B_{ext})

- d'un éventuel champ extérieur créé par un autre circuit parcouru par un courant I' soit $\phi_{C \rightarrow C'} = M I'$

La loi de Lenz s'écrit donc $e = - \frac{d\phi_p}{dt} - \frac{d\phi_{ext}}{dt} - \frac{d\phi_{C \rightarrow C'}}{dt} = - L \frac{dI}{dt} - \frac{d\phi_{ext}}{dt} - M \frac{dI'}{dt}$

auto-induction
induction mutuelle

Exercice 3 : Soit un fil infini parcouru par un courant d'intensité I_1 et une bobine plate de N spires rectangulaires de côtés longueur h (côté parallèle au fil) et $2a$ (côté perpendiculaire au fil) parcourue par un courant d'intensité I_2 . On note b la distance moyenne entre le fil et la bobine.



1- Rappeler le champ magnétique créé par le fil infini en coordonnées cylindriques. Exprimer le flux du champ créé par le fil à travers la bobine et en déduire la mutuelle inductance M .

2- Le fil est alimenté par une source de tension qui délivre l'intensité $I_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$. La bobine n'est pas alimentée, elle a pour résistance R et pour inductance propre L . Représenter le schéma équivalent de la bobine et déterminer $\underline{I}_2$ en notation complexe. En déduire $I_2(t)$ dans la bobine.

1) $\vec{B}_1$ créé par le fil s'écrit :

$$\vec{B}_1(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

On calcule le flux à travers la spire :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \int \vec{B}_1(\mu_2) \cdot d\vec{S} \vec{n}(\mu_2)$$

μ_2 est repéré par r et z donc $dS = dr dz$
 $\vec{n}(\mu_2)$ est orienté par I_2

$$\begin{aligned} \Phi_{1 \rightarrow 2} &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \cdot d\vec{S} \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_{b-a}^{b+a} \frac{dr}{r} \times \int_0^h dz \end{aligned}$$

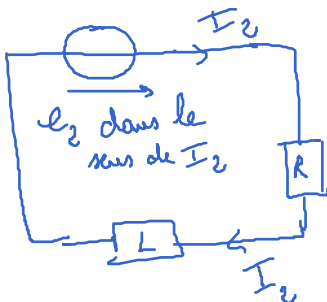
d'où $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right) = M I_1$ donc $M = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right)$

Rq: M de la forme $\mu_0 \times \text{longueur}$

2) La bobine est le siège d'un courant induit :

loi de Faraday : $e_2 = - \frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt} = - \frac{d(M I_1)}{dt} = + M \omega I_0 \sin(\omega t)$ en notation réelle
 $= -M j\omega \underline{I}_1$ en notation complexe $\underline{I}_1 = I_0 e^{j\omega t}$

Circuit équivalent à la bobine : loi des mailles :



$$e_2 = R \underline{I}_2 + L \frac{d\underline{I}_2}{dt}$$

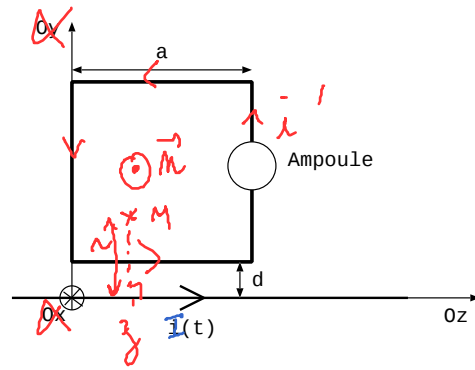
en notation complexe : $\underline{e}_2 = R \underline{I}_2 + j\omega L \underline{I}_2$

soit $-M j\omega \underline{I}_1 = (R + j\omega L) \underline{I}_2$

et $\underline{I}_2 = \frac{-j M \omega}{R + j\omega L} \underline{I}_1$ donc $I_2(t) = I_{2\text{eff}} \cos(\omega t + \varphi)$

$$I_{2\text{eff}} = |\underline{I}_2| = \frac{M \omega}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \text{ et } \varphi = \arg \underline{I}_2$$

Exercice 4 : Une ligne à haute tension assimilée à un fil droit infini transporte un courant sinusoïdal d'intensité $I(t)$ de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$ et de valeur efficace $I_e = 800 \text{ A}$. On approche de cette ligne une bobine plate d'épaisseur négligeable de N spires carrées de côté $a = 40 \text{ cm}$ à une distance $d = 3 \text{ cm}$. Cette bobine d'inductance et de résistance négligeables est fermée sur une ampoule qui éclaire si la tension efficace à ses bornes est supérieure à $1,5 \text{ V}$. On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.



1- Exprimer l'intensité $I(t)$ en fonction des données.

2- Rappeler, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique créé par le fil en supposant que le champ créé par un courant variable a la même expression que celui créé par un courant continu. En déduire le champ magnétique en coordonnées cartésiennes en un point M à l'intérieur de la bobine.

3- Exprimer le flux du champ magnétique créé par le fil à travers la bobine et en déduire la fem induite dans la bobine. Représenter le schéma électrique équivalent de la bobine et en déduire le nombre de spires N minimal pour que l'ampoule éclaire.

1) $I(t) = I_m \cos(\omega t) = \underbrace{\sqrt{2}}_{I_m} I_e \cos(2\pi f t)$

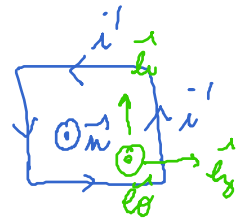
Value efficace = $\frac{\text{amplitude}}{\sqrt{2}}$

2)

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

3) le flux du champ $\vec{B}$ créé par le fil à travers une spire est:

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_{\text{spire}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} \vec{u}(M) = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot d\vec{S} \vec{e}_\theta \\ &= + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dr}{r} \times \int_0^a dz = + \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \end{aligned}$$



M est repéré par r et z
 $dS = dr dz$ (voir schéma du haut)

$\phi_{N\text{spires}} = N \phi_{\text{spire}}$

loi de Faraday: $e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \frac{dI}{dt} = - \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) (-2\pi f I_e \sqrt{2} \sin(\omega t))$

$e = + \underbrace{\mu_0 N a f I_e \sqrt{2} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}_{\text{amplitude de la tension aux bornes de l'ampoule}} \sin(2\pi f t)$

Circuit équivalent:



$V_{\text{eff}} = \frac{\text{amplitude}}{\sqrt{2}} = \mu_0 N a f I_e \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) > 1,5 \text{ V}$

Condition pour que l'ampoule s'éclaire