

DS 8 de physique

Le sujet comprend trois problèmes indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numérotter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.

Il est demandé un effort de présentation (tirer un trait entre chaque question et encadrer les résultats) et de rédaction (prendre soin de nommer les lois utilisées, les hypothèses pour les appliquer et expliquer clairement).

I. Pb I: Blue Fire

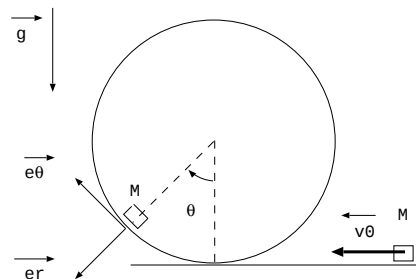
Le Blue Fire est l'une des montagnes russes du parc d'attraction Europa-Park, situé à Rust, en Allemagne. Elle est en service depuis le 4 avril 2009. Le nom de l'attraction a été choisi en référence à la couleur de la flamme émise par la combustion du gaz naturel, vecteur énergétique important. Cette montagne russe fait partie de la famille des montagnes russes lancées (launched coaster) : en effet, l'accélération principale du train a lieu dans la zone de départ, à l'aide d'une longue zone accélératrice rectiligne. Ce problème étudie le mouvement et l'arrivée du blue fire.

Partie A: le looping

Le train aborde un looping. On cherche à estimer à l'aide d'un modèle le temps mis par le train pour effectuer le looping. Pour cela, on va réduire l'étude du mouvement du train à celui de son centre de gravité, et on modélisera sa trajectoire par une trajectoire circulaire de rayon R . Cela revient donc à étudier le mouvement d'un point matériel M confondu avec G . On suppose dans ce modèle que l'action des rails sur M est normale aux rails pendant tout le mouvement, et on négligera tous les frottements. Au moment d'aborder le looping, le train possède la vitesse $v_0 = 27 \text{ m.s}^{-1}$ orientée comme sur la ci-dessous. On prendra $\theta(t=0) = 0$.



looping réel

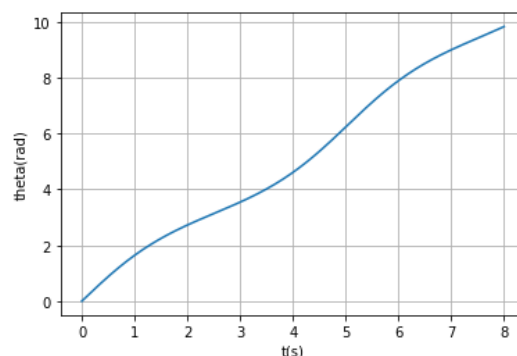


1. Etablir l'expression du vecteur accélération de M dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. On l'exprimera en fonction de $v = \|\vec{v}\|$, R et $\frac{dv}{dt}$.
2. Sur trois schémas, représenter qualitativement le vecteur accélération de M pour $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ et $\theta = 3\pi/2$. Justifier la construction.
3. Etablir l'équation différentielle liant $\ddot{\theta}$, à R , g et θ au cours du looping. Peut-on déterminer $\theta(t)$ de manière analytique (c'est-à-dire "à la main") facilement à partir de cette équation? Pourquoi?

Pour estimer le temps nécessaire à la réalisation complète du looping, on propose de résoudre cette équation différentielle par un programme python en utilisant la méthode d'Euler.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 R,v0,g=15,27,9.8
5 t=[0]
6 theta=[instruction 1]
7 thetapoint=[instruction 2]
8 dt=0.01
9 N= instruction 3
10 for i in range(N):
11     a= instruction 4
12     t.append(t[i]+dt)
13     thetapoint.append(thetapoint[i]+a*dt)
14     theta.append(instruction 5)
15 plt.plot(t,theta)
16 plt.grid()
17 plt.xlabel('t(s)')
18 plt.ylabel('theta(rad)')
19 plt.show()
```

En exécutant ce programme, on obtient le graphe suivant pour $\theta(t)$:



Dans le code on note $[t]$, $[theta]$ et $[thetapoint]$ les listes contenant les valeurs du temps, de $\theta(t)$ et de $\dot{\theta}(t)$ au cours de la simulation.

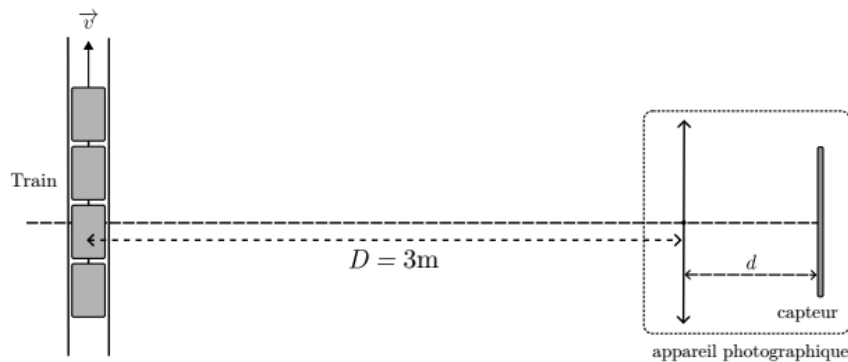
4. Donner le contenu des instructions 1,2,3,4 et 5 en justifiant vos réponses.
5. En déduire la valeur numérique du temps nécessaire pour effectuer le looping.

Partie B: l'arrivée

Lors de l'une des dernières figures, un appareil photographique numériquement placé prend des photos de chacune des voitures du train et de leurs passagers alors que le train est à grande vitesse. Les visiteurs peuvent ainsi acheter une photographie-souvenir de leur expérience dans le Blue Fire à la sortie.

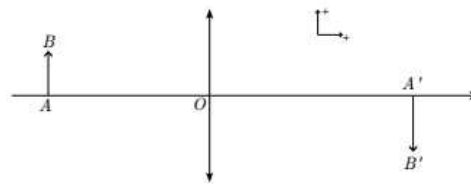


L'objectif de l'appareil utilisé sera modélisé par une simple lentille mince convergente, de distance focale $f' = 5,0 \text{ cm}$. Il est situé à $D = 3,0 \text{ m}$ du sujet à photographier au moment où la photographie est prise. Le capteur de l'appareil photographique, sur lequel se forme l'image, est une matrice rectangulaire de taille $L.l$ avec $L = 36 \text{ mm}$ et $l = 24 \text{ mm}$ constituée de pixels carrés de taille a . Le constructeur indique pour son capteur une résolution de 24 Mpixels. Pour décrire la situation, on se placera dans la configuration géométrique simplifiée suivante:



On notera en particulier que, même si le déplacement réel du train n'est pas orthogonal à l'axe optique de l'objectif, on fait ici cette hypothèse pour simplifier la description optique de la situation. Lors de la prise de la photographie, la vitesse de train est de $v = 15 \text{ m.s}^{-1}$.

On rappelle la formule de conjugaison de Descartes pour une lentille mince : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$ ainsi que la formule de grandissement algébrique $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$. Le schéma optique est représenté sur la figure 15.

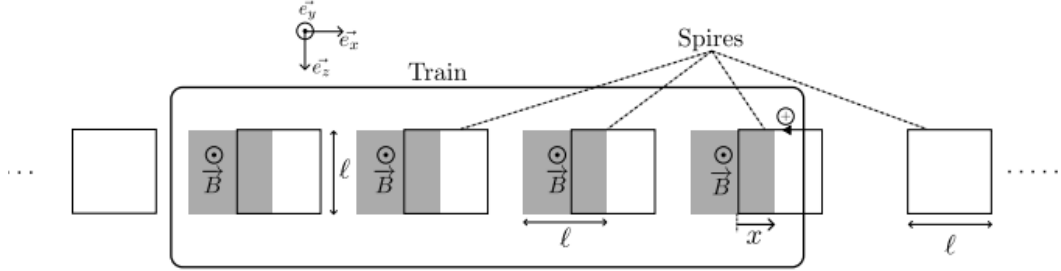


6. Quelles sont les conditions optiques permettant un stigmatisme approché? Énoncer ces conditions.
7. Déterminer avec deux chiffres significatifs la valeur numérique de la distance d entre le capteur et la lentille de l'objectif.
8. Déterminer la valeur numérique de a .
9. Montrer que si la durée d'exposition t_{exp} du capteur pendant la prise de la photographie est trop longue, la photo sera floue. Calculer un ordre de grandeur de cette durée maximale d'exposition pour obtenir une photographie nette en fonction des paramètres pertinents, et proposer une application numérique.

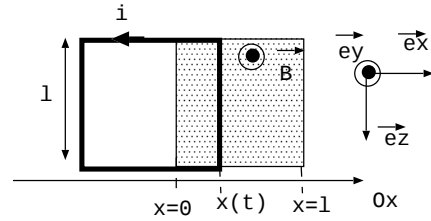
À la fin du trajet, le train doit être freiné. Pour éviter un freinage uniquement mécanique qui nécessiterait de fréquents remplacements des pièces en frottement, la solution adoptée par les concepteurs du Blue Fire est un freinage par induction.

Pour décrire ce freinage, on utilise la modélisation simplifiée suivante. Le mouvement du train sera étudié dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Pour ce freinage, des aimants sont posés sur les rails. Ces aimants créent des zones carrées de côté l distantes de l chacune, dans lesquelles règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_y$. On note m la masse totale du train. Sous le plancher des wagons du train, sont placées, perpendiculairement à $\vec{B}$, des spires carrées en cuivre, de côté identique l et de résistance électrique R , régulièrement espacées entre elles de cette même distance l . On suppose que le train comporte N spires.



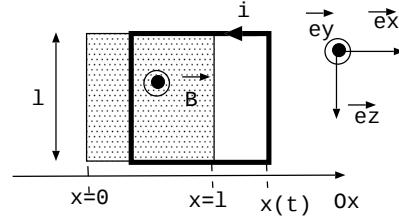
Dans un premier temps, on s'intéresse à l'interaction entre un seul aimant posé sur les rails et une seule spire du train, dont on négligera l'inductance propre. La zone de champ magnétique étudiée est placée entre $x = 0$ et $x = l$ et on note $x(t)$ la position de l'avant de la spire. On note i le courant dans la spire.



10. Décrire qualitativement mais précisément les phénomènes physiques qui se produisent permettant de freiner le train.

11. Déterminer l'expression de la force électromotrice induite dans la spire e en fonction de B , v et l . En déduire l'équation électrique liant B , v , l , R et l'intensité i dans la spire.

12. Montrer que tant que $0 < x < l$, la spire est soumise à une force qui se met sous la forme $\vec{F}_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}} = -\alpha v \vec{e}_x$ où $v(t)$ est la vitesse du train. Déterminer l'expression de α .



13. Montrer que pour $l < x < 2l$, la force $\vec{F}_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}}$ possède la même expression que précédemment. On considère maintenant l'interaction des aimants sur les rails (il y a des aimants sur toute la zone de freinage) avec les N spires fixes.

14. Quelle est alors la force totale $\vec{F}_{\text{aimant} \rightarrow \text{train}}$ s'exerçant sur la totalité du train? En déduire l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ tout au long de la phase de freinage, dont on définira la constante de temps τ en fonction des paramètres. Exprimer $v(t)$.

15. Que devient l'énergie cinétique perdue par le train lors de ce freinage? Justifier votre réponse par un calcul.

16. Justifier la nécessité d'un freinage mécanique d'appoint afin d'immobiliser complètement le train à la fin de son trajet.

II. Pb II: Dimensionnement d'un câble électrique

On s'intéresse à la dimension des câbles employés pour transporter l'énergie électrique des centrales au consommateur. On cherche à justifier le rayon R_c des câbles utilisés en début du réseau basse tension.

Pour cela, on adopte le modèle de Drude: un électron libre de charge $-e$ est soumis à la force qu'exerce un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ et à une force de frottement visqueux, modélisant les collisions, de la forme $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse des électrons, τ un temps de relaxation et m_e la masse d'un électron.

Un fil infini d'axe Oz et de rayon R_c est parcouru par un vecteur densité de courant $\vec{j}_c$. Le milieu, supposé électriquement neutre, contient n_0 électrons mobiles par unité de volume. Il est suffisamment dilué pour pouvoir négliger les interactions entre les différentes charges du milieu.

Le mouvement d'un électron du milieu conducteur est non relativiste et il est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. Ecrire les quatre équations de Maxwell en donnant leur nom dans ce milieu électriquement neutre dans lequel la densité volumique de charges est nulle.

2. Dans le modèle présenté ci-dessus, appliquer la deuxième loi de Newton à un électron du milieu et donner l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse $\vec{v}$. Faut-il prendre en compte le poids de l'électron ? Justifier. Données: $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

3. Dans ce milieu, justifier que la force magnétique subie par un électron est négligeable devant la force électrique. Simplifier alors l'équation du mouvement d'un électron.

On se place en régime permanent sinusoïdal et on note $\vec{v}$ la vitesse de l'électron et $\vec{j}_c$ le vecteur densité de courant dans ce régime. Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$.

4. Exprimer $\vec{v}$ en fonction de e , $\vec{E}$, τ , m_e et ω . En déduire l'expression du vecteur densité de courant $\vec{j}_c$ en fonction des mêmes variables et de n_0 .

5. Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale en fonction de $\vec{j}_c$, $\vec{E}$ et de la conductivité γ . En déduire que la conductivité complexe $\underline{\gamma}$ en régime permanent sinusoïdal s'exprime: $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}$

Donner l'expression de γ_0 en fonction de n_0 , e , τ et m_e .

Un milieu conducteur tel que le câble étudié est caractérisé par un temps de relaxation de l'ordre de $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$ et une densité de porteurs de charge de l'ordre de $n_0 \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$. La fréquence du signal étudié est $f_r = 50 \text{ Hz}$.

6. Calculer γ_0 . Par des calculs d'ordre de grandeur, simplifier l'expression de $\underline{\gamma}$ ainsi que l'équation de Maxwell-Ampère. Donnée: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

7. On donne, pour tout champ vectoriel $\vec{f}$, $\text{rot}(\text{rot} \vec{f}) = \text{grad}(\text{div} \vec{f}) - \Delta \vec{f}$.

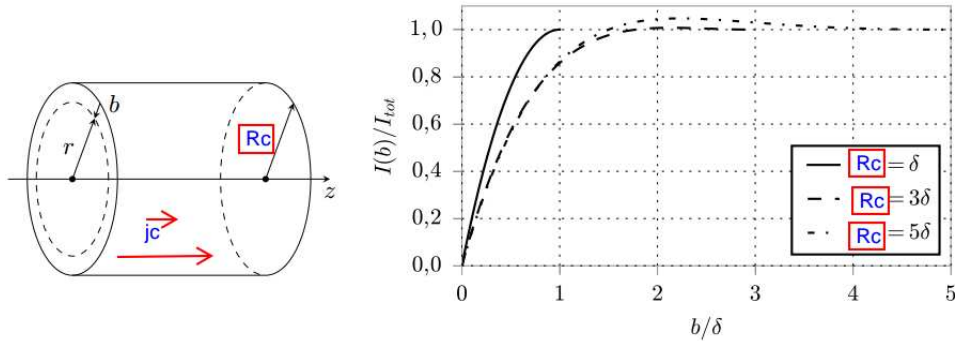
Déduire des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm que $\vec{j}_c$ vérifie l'équation: $\Delta \vec{j}_c - \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = \vec{0}$

Quel nom porte le phénomène lié à une telle équation différentielle?

En déduire que cette équation peut se mettre sous la forme $\Delta \vec{j}_c = \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \vec{j}_c$. Exprimer δ en fonction de μ_0 , f et γ_0 . Calculer numériquement δ et préciser son unité. Données: $(1+j)^2 = 2j$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ et $f = 50 \text{ Hz}$.

8. La résolution de cette équation n'est pas demandée. On définit l'intensité $I(b)$ circulant dans l'épaisseur b la plus externe du câble par $I(b) = \left| \int_{R_c-b}^{R_c} 2\pi j_c(r) r dr \right|$ et I_{tot} l'intensité totale dans le conducteur par

$$I_{tot} = \left| \int_0^{R_c} 2\pi j_c(r) r dr \right|.$$



En étudiant les courbes représentatives de $I(b)/I_{tot}$ pour différents rayons de câble $R_c = \delta$, $R_c = 3\delta$ et $R_c = 5\delta$, quelle est la zone du câble la plus sollicitée pour transporter le courant? Est-il utile de fabriquer des câbles dont le rayon vaut plusieurs fois δ ? Justifier.

III. Pb III: Etude d'un câble coaxial

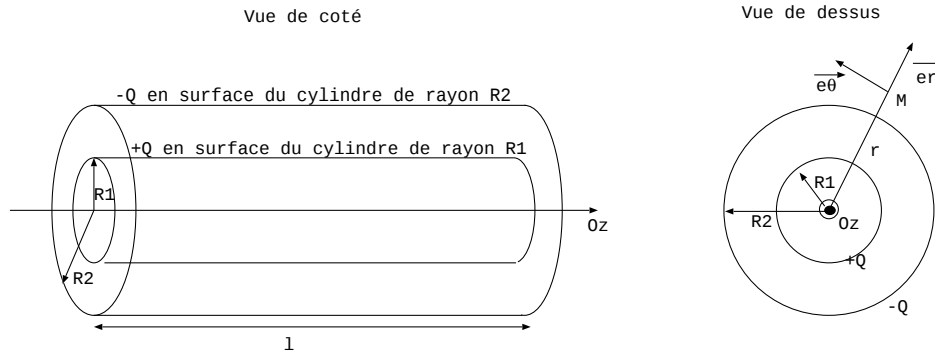
Les câbles coaxiaux sont utilisés comme moyen de transmission d'informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audio-numériques, ainsi que pour les interconnexions dans les réseaux informatiques. Ce sujet aborde la modélisation du câble coaxial.

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs de même longueur l , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

Données : $R_1 = 0,25 \text{ mm}$, $R_2 = 1,25 \text{ mm}$, $l = 100 \text{ m}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}^{-1}$ et $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H.m}^{-1}$.

Modélisation :

Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon R_1 , le conducteur (2) a un rayon R_2 . Ces deux conducteurs ont même longueur l . Vu que $l \gg R_2$, on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide. On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base de coordonnées cylindriques en M .



Capacité linéique Γ :

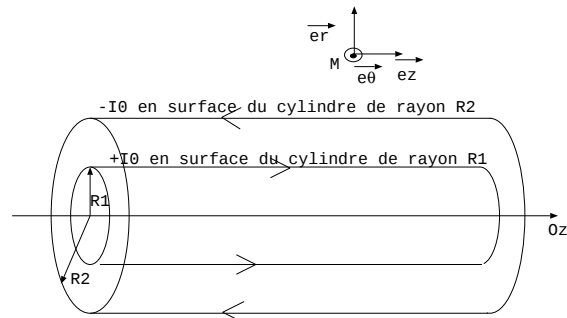
On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et $-Q$. Elles sont uniformément réparties en surface.

1. Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.
2. Par application du théorème de Gauss, exprimer $E(r)$ en fonction de Q , r , l et ϵ_0 pour $R_1 < r < R_2$.
3. Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs $V_1 = V(r = R_1)$ et $V_2 = V(r = R_2)$, constants. Exprimer $V_1 - V_2$ en fonction de Q , R_1 , R_2 , l et ϵ_0 .

4. Exprimer la capacité C de ce condensateur et en déduire que sa capacité linéique s'écrit $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$.
Calculer numériquement Γ .

Inductance linéique Λ :

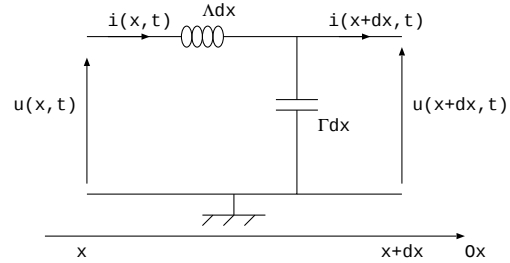
On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller $+I_0$, le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$. Les courants sont répartis sur la surface des conducteurs.



5. Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique $\vec{B}(M)$. Par des arguments d'invariance et de symétrie, justifier que $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$.

6. Par application du théorème d'Ampère sur un contour que l'on précisera, exprimer $B(r)$ en fonction de I_0 , r et μ_0 dans les trois domaines distincts $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$.
7. Exprimer l'énergie magnétique Em total du câble coaxial en fonction de I_0 , μ_0 , l , R_1 et R_2 .
8. En déduire l'inductance L du câble de longueur l et montrer que l'inductance linéique s'écrit $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. Calculer numériquement l'inductance linéique Λ du câble coaxial.
9. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ est homogène à une vitesse. Calculer numériquement cette vitesse. Que représente cette vitesse?

10. On modélise une longueur dx d'un câble coaxial par le schéma ci-contre comportant une bobine d'inductance Λdx et un condensateur de capacité Γdx où Λ et Γ sont respectivement les inductance et capacité linéiques du câble.



- 10.a. Déduire de la loi des noeuds, la relation $\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$.
- 10.b. Déduire de la loi des mailles, la relation entre $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial i}{\partial t}(x, t)$.
- 10.c. En déduire l'équation de propagation vérifiée par $u(x, t)$.

On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques (OPPH) de pulsation ω .

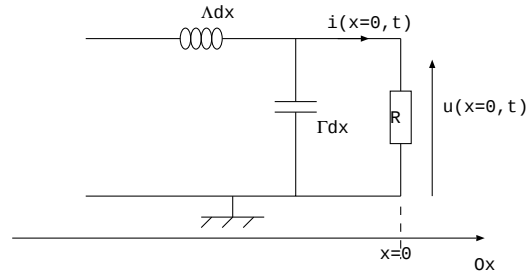
11. Déterminer la relation de dispersion des ondes dans ce milieu entre la pulsation et le nombre d'onde noté k . Donner la définition d'un milieu dispersif et d'un milieu absorbant. Le milieu est-il dispersif? Est-il absorbant? Les réponses devront être succinctement justifiées.

On cherche, en notation complexe, une solution sous la forme de la somme d'une OPPH incidente notée $\underline{u}_+(x, t)$ se propageant vers les x positifs et d'une onde réfléchie $\underline{u}_-(x, t)$ se propageant vers les x négatifs. On note respectivement $\underline{U}_+$ et $\underline{U}_-$ les amplitudes de ces ondes. Chaque onde de tension est de plus associée à un courant $\underline{i}_+(x, t)$ et $\underline{i}_-(x, t)$, d'amplitudes $\underline{I}_+$ et $\underline{I}_-$.

On définit enfin l'impédance du milieu par $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$, elle dépend du type d'onde qui s'y propage.

12. Exprimer les OPPH incidentes et réfléchies en tension. En utilisant une des relations obtenues question 10a ou 10b, exprimer l'impédance du milieu pour les ondes incidentes, notée $\underline{Z}_+$, et pour les ondes réfléchies $\underline{Z}_-$, en fonction de Λ et Γ . Quelle est l'unité des impédances $\underline{Z}_+$ et $\underline{Z}_-$?

13. Le GBF émet une onde incidente qui se propage dans le câble (l'onde vient de $x \rightarrow -\infty$). Le câble est fermé par une résistance de charge notée R placée en $x = 0$. Cela génère une onde réfléchie. On note $\underline{u}(x, t) = \underline{u}_+(x, t) + \underline{u}_-(x, t)$ l'impédance du câble.

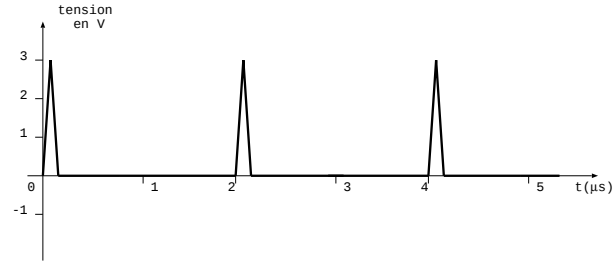
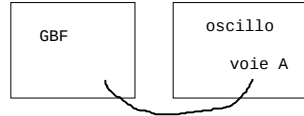


13.a. Déduire des questions précédentes l'expression de l'onde d'intensité $\underline{i}(x, t)$ en fonction de $\underline{Z}$, $\underline{u}_+(x, t)$ et $\underline{u}_-(x, t)$.

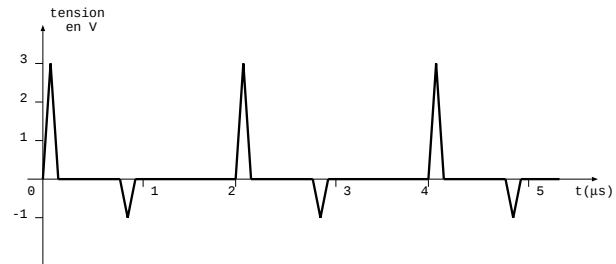
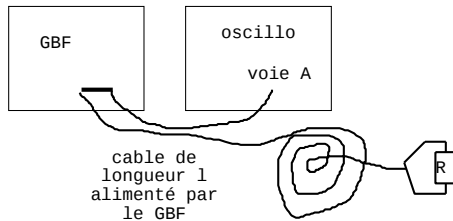
13.b. On définit le coefficient de réflexion $\underline{r}$ par $\underline{r} = \frac{\underline{u}(x=0, t)}{\underline{i}(x=0, t)}$.

Donner la relation entre $\underline{i}(x=0, t)$, R et $\underline{u}(x=0, t)$, en déduire que $\underline{r} = \frac{R - \underline{Z}}{R + \underline{Z}}$.

13.c. On envoie sur le câble des impulsions triangulaires de fréquence f . On relie la sortie du GBF à la voie A de l'oscilloscope pour observer le signal. On donne ci-dessous le schéma du montage et la tension observée à l'oscilloscope.

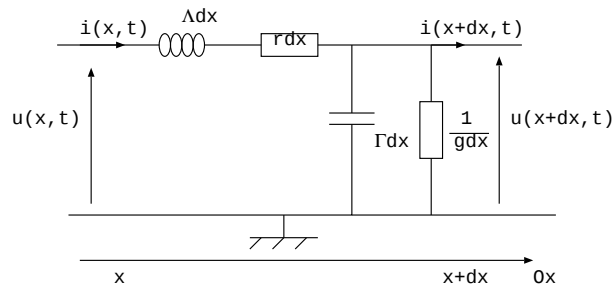


On alimente le câble en entrée par les impulsions délivrées par le GBF. La sortie du câble de longueur l , est reliée à une résistance R . On observe la tension à l'entrée du câble sur la voie A de l'oscilloscope. On donne ci-dessous le schéma du montage et la tension observée à l'oscilloscope.



Déduire des graphes, les valeurs numériques de: la fréquence des ondes, la vitesse des ondes dans le câble et l'impédance Z du câble. Donnée: longueur du câble $l = 100 \text{ m}$ et $R = 25 \Omega$.

En réalité, il y a des pertes d'énergie dues à la nature résistive des câbles. On ajoute une résistance $r dx$ en série avec l'inductance et une autre résistance linéique de valeur $\frac{1}{g dx}$ en parallèle avec la capacité (c'est-à-dire que $g dx$ est l'admittance de cette résistance).



14. Quelles sont les deux nouvelles équations différentielles couplées et du premier ordre en x et en t vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$?

15. On considère des solutions de la forme $\underline{u}(x,t) = \underline{U}(x)e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(x,t) = \underline{I}(x)e^{j\omega t}$. Montrer que $\underline{U}(x)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} = \underline{Z}_s \underline{Y}_p \underline{U}(x)$

avec $\underline{Z}_s = r + j\Lambda\omega$ et $\underline{Y}_p = g + j\Gamma\omega$

On note $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$ tel que $\underline{k}^2 = \underline{Z}_s \underline{Y}_p$, $k'(\omega) > 0$ et $k''(\omega) > 0$. Les solutions de l'équation précédente conduisent à:

$$\underline{u}(x,t) = \underline{U}_1 e^{+k''(\omega)x + j(\omega t - k'(\omega)x)} + \underline{U}_2 e^{-k''(\omega)(x-l) + j(\omega t + k'(\omega)x)}.$$

16. Sans chercher à déterminer les expressions de $k'(\omega)$ et de $k''(\omega)$, préciser si ce milieu est dispersif et/ou absorbant.

En choisissant judicieusement les composants et la géométrie de la ligne, il est possible de respecter la condition $\Lambda g = r\Gamma$. Dans ce cas, on trouve $k'(\omega) = \omega\sqrt{\Gamma\Lambda}$ et $k''(\omega) = -g\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$. On montre aussi que $|k''(\omega)|$ est minimal lorsque cette condition est respectée.

17. Quels sont les avantages à choisir les paramètres des câbles tels que $\Lambda g = r\Gamma$?