

J'apprends mon cours de physique quantique 2

1. On donne l'équation de Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + U(x) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$ et la forme des états stationnaires: $\psi(x, t) = \phi(x) e^{-iEt/\hbar}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \phi''(x) e^{-iEt/\hbar} & \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{iE}{\hbar} \phi(x) e^{-iEt/\hbar} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) e^{-iEt/\hbar} + U \phi(x) e^{-iEt/\hbar} &= i\hbar \left(-\frac{iE}{\hbar} \phi(x) e^{-iEt/\hbar} \right) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \phi'' + U \phi &= E \phi \quad \text{soit} \quad \phi'' - \frac{2m}{\hbar^2} (U - E) \phi = 0 \end{aligned}$$

2. Donner le solution de cette équation différentielle dans le cas où $E < U$ avec U une constante.

On garde l'éq. diff. sous la forme: $\phi'' - \frac{2m}{\hbar^2} (U - E) \phi = 0$ ce n'est pas un O.H.

On pose: $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U - E)}$ et $\phi(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$

3. Donner le solution de cette équation différentielle dans le cas où $E > U$ avec U une constante.

On met l'éq. diff. sous la forme: $\phi'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \phi = 0$ c'est un O.H.

On pose $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - U)}$; pulsation spatiale et $\phi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

4. Une particule se déplace selon $+Ox$ dans l'espace $x > 0$. On donne sa fonction d'onde, simplifier cette équation si besoin.

$$\psi(x, t) = A e^{-i(Et/\hbar + kx)} + B e^{-i(Et/\hbar - kx)}$$

$A e^{-i(Et/\hbar + kx)}$ qui représente la particule se déplaçant selon $(-Ox)$

$B e^{-i(Et/\hbar - kx)}$ qui représente la particule se déplaçant selon $(+Ox)$

donc ici $A = 0$

Rq: la condition $x > 0$ n'a pas d'influence sur le résultat

5. Une particule se déplace selon $+Ox$ dans l'espace $x < 0$. On donne sa fonction d'onde, simplifier cette équation si besoin.

$$\psi(x, t) = A e^{kx} e^{-iEt/\hbar} + B e^{-kx} e^{-iEt/\hbar}$$

ce sont des O.S.
 ondes évanescentes
 amorties: après

Ici x peut tendre vers $-\infty$ alors e^{-kx} diverge donc on doit avoir $B = 0$

Rq: l'indication, la particule se déplace selon $(+Ox)$ n'a pas d'influence sur le résultat

6. Une particule peut se déplacer selon $+Ox$ et $-Ox$ dans l'espace $x < 0$. On donne sa fonction d'onde, simplifier cette équation si besoin.

$$\psi(x, t) = Ae^{-i(Et/\hbar + kx)} + Be^{-i(Et/\hbar - kx)}$$

$\partial \psi / \partial x^-$: particule se déplaçant selon $(-Ox)$

$\partial \psi / \partial x^+$: particule se déplaçant selon $(+Ox)$

ici les 2 ondes existent.
A et B $\neq 0$

Re: l'information $u < 0$ ne sert à rien

7. Une particule se déplace selon $+Ox$ dans l'espace $0 < x < L$. On donne sa fonction d'onde, simplifier cette équation si besoin.

$$\psi(x, t) = Ae^{kx}e^{-iEt/\hbar} + Be^{-kx}e^{-iEt/\hbar}$$

O.S. quanties: ondes évanescentes

ici u ne peut pas tendre ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$ donc A et B $\neq 0$

Re: l'information selon laquelle la particule se déplace selon $(+Ox)$ ne sert à rien.

8. Donner la définition d'un état stationnaire et vérifier que la fonction d'onde $\psi(x, t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}$ convient.

Un état est dit stationnaire lorsque la probabilité de présence ne dépend pas du temps.

ici $\frac{dP}{dt} = |\psi(x, t)|^2 = |\phi(x)|^2$: ne dépend pas du temps

9. On donne l'expression du vecteur densité de probabilité: $\vec{J}(x, t) = \frac{i\hbar}{2m}(\psi(x, t)\frac{\partial \psi^*}{\partial x}(x, t) - \psi^*(x, t)\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t))\vec{e}_x$.

Exprimer le vecteur densité de courant pour $\psi(x, t) = Ae^{kx}e^{-iEt/\hbar}$.

$$\psi^* = A^* e^{kx} e^{iEt/\hbar}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x} = k \psi^*$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = k \psi$$

$$\vec{J} = \vec{0}$$

Exprimer le vecteur densité de courant pour $\psi(x, t) = Ae^{i(kx - Et/\hbar)}$.

$$\psi^* = A^* e^{-i(kx - Et/\hbar)}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x} = -ik \psi^*$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik \psi$$

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi (-ik \psi^*) - \psi^* (ik \psi) \right) \vec{e}_x = \frac{i\hbar}{2m} (-2ik |\psi|^2) \vec{e}_x$$

soit $\vec{J} = \frac{\hbar k}{m} |\psi|^2 \vec{e}_x$

$\vec{J}$ dans le sens de déplacement de la particule