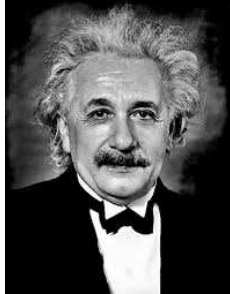


Mécanique quantique

I. Nature ondulatoire ou corpusculaire

1. Historique : mise en évidence du caractère ondulatoire des particules

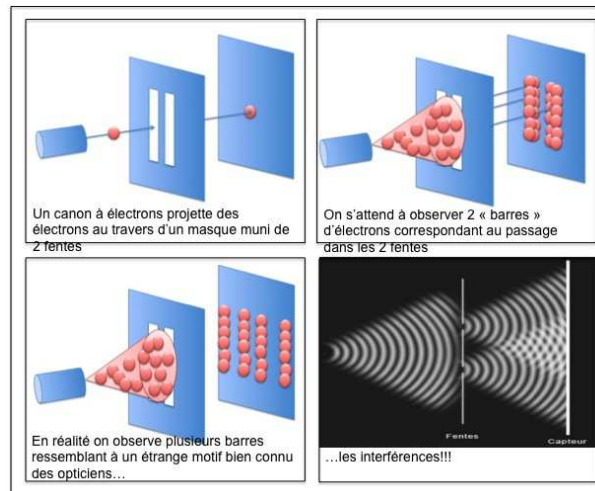
En 1905 Einstein montre que la lumière décrite comme une onde par les équations de Maxwell, se comporte aussi comme une corpuscule : le photon.



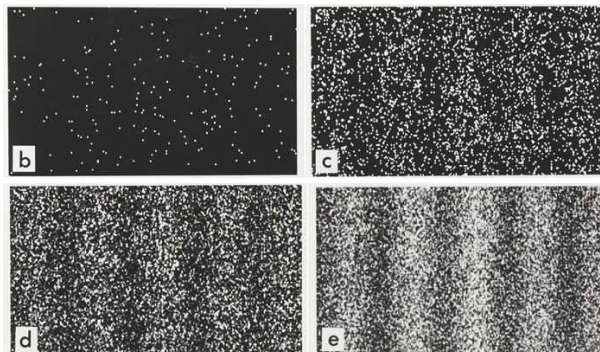
- de masse *nulle*
 - de vitesse (dans le vide) $c = 3.10^8 \text{ ms}^{-1}$
 - d'énergie $E = h\nu$ où ν est la fréquence de l'onde associée au photon
 - de quantité de mouvement est $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$
- avec $h = 6,6.10^{-34} \text{ J.s}$ constante de Planck

La question qui en découle est alors : puisque la lumière qui est une onde se comporte également comme une corpuscule, les particules de matière ont-elles un comportement ondulatoire?

Pour répondre à cette question, les physiciens ont réalisé avec des électrons une expérience analogue à celle des fentes d'Young en optique :



Les résultats expérimentaux sont les suivants : b: au bout de quelques secondes, e: au bout de 30 minutes (environ 18 000 impacts).



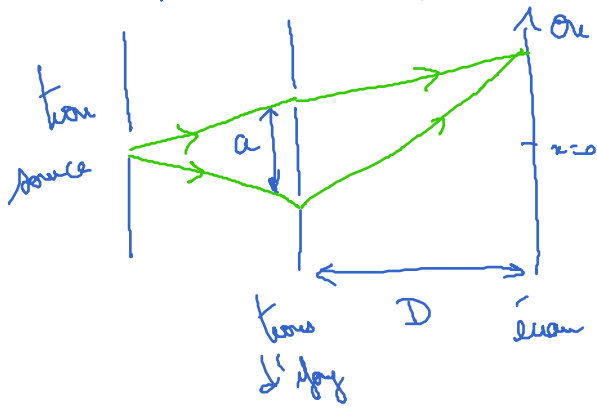
- La nature corpusculaire des électrons est mise en évidence par

*l'observation d'impacts
ponctuels sur l'écran*

- L'absence de déterminisme est mise en évidence par

*l'observation d'impacts à des positions ≠
pour des particules émises de la même source
et arrivées aux mêmes positions*

- La nature ondulatoire des électrons est mise en évidence par l'observation de franges d'interférences lumineuses et sombres sur l'écran. Les franges lumineuses correspondent à des zones de forte densité d'impacts et les franges sombres à des zones où il n'y a pas eu d'impacts.



$$\delta(x) = \frac{a x}{D} : \text{différence de marche}$$

$$i = \frac{\lambda D}{a} : \text{interfrange}$$

pour une particule que vaut λ ?

2. Longueur d'onde de De Broglie



En 1924, Louis de Broglie donne la relation entre la longueur d'onde associée à une particule et son impulsion p (aussi appelée quantité de mouvement):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v}$$

où en mécanique classique $p = m.v$ avec m la masse de la particule et v sa vitesse (inférieure à 0,1c: hypothèse non relativiste) et $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ est la constante de Planck

Utilisation de la longueur d'onde de De Broglie: Lorsque la longueur d'onde de De Broglie d'une particule est de l'ordre de grandeur de la taille du système, la nature ondulatoire de la particule peut se manifester.

Ordres de grandeur: distance entre deux atomes: 10^{-10} m taille du noyau: 10^{-15} m

Analogie avec l'optique: la lumière est un phénomène ondulatoire

On note λ : longueur d'onde, visible: $400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$

On note d : taille caractéristique du système

Cas où $\lambda \ll d$: on peut négliger la complètement ondulatoire de la lumière. Les rayons sont des droites dans les milieux homogènes et les rayons se comportent indépendamment les uns des autres

C'est l'approximation de l'optique géométrique pour laquelle la nature ondulatoire de la lumière ne se manifeste pas.

Cas où $\lambda \approx d$

Deux ondes cohérentes qui se rencontrent conduisent au phénomène d'interférences

Une onde qui traverse un diaphragme conduit au phénomène de diffraction

Ces deux phénomènes sont la manifestation de la nature ondulatoire de la lumière que l'on ne peut pas négliger

Pour les exemples suivants, calculer la longueur d'onde de De Broglie et commenter le résultat numérique.

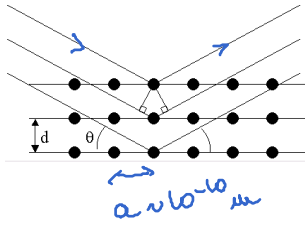
Exemple 1 : Balle de ping-pong de masse 3 g et de vitesse 5 m/s.

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^{-3} \times 5} \approx 10^{-31} \text{ m} \ll d = 99 \text{ cm}$$

taille de la balle

la nature ondulatoire de la balle de ping-pong ne se manifeste pas, on décrit cet objet avec la mécanique classique

Exemple 2: Les neutrons thermiques ($m_n = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) de température $T = 300 \text{ K}$ servent à sonder les structures cristallines par diffraction (constante de Boltzmann $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ SI}$).



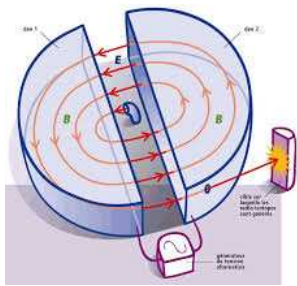
$$E_c = \frac{m v^2}{2} = 3 \times \frac{1}{2} k_B T \text{ d'où } v = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$$

$$\text{AN: } v = \sqrt{\frac{3 \times 1,4 \cdot 10^{-23} \times 300}{1,7 \cdot 10^{-27}}} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{6,6 \cdot 10^{-36}}{1,7 \cdot 10^{-27} \times 3 \cdot 10^3} \approx 10^{-10} \text{ m} : \text{ de l'ordre de grandeur de la distance } a \text{ entre 2 atomes}$$

$\lambda \approx a$ donc la nature ondulatoire des neutrons se manifeste dans cette expérience, on étudie les neutrons du point de vue de la physique quantique et on observe bien de la diffraction de neutrons quand on les envoie sur un solide

Exemple 3 : Dans un cyclotron, des protons ($m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) sont accélérés sous une tension de 3 MV . Ces protons servent, en bombardant la matière, à fabriquer des isotopes radioactifs.



$$\frac{m v_f^2}{2} + e V_2 = 0 + e V_1 = E_m$$

conservation de l'Em

$$v_f = \sqrt{\frac{2e(V_1 - V_2)}{m}}$$

$$\text{AN: } v_f = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 3 \cdot 10^6}{1,7 \cdot 10^{-27}}} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-1}$$

$$\begin{array}{c} \vec{E} \\ \downarrow \\ \vec{v}_1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vec{E} \\ \downarrow \\ \vec{v}_f \end{array}$$

$V_1 > V_2$ V_2

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{6,6 \cdot 10^{-36}}{1,7 \cdot 10^{-27} \times 3 \cdot 10^7} \approx 10^{-16} \text{ m} : \text{ de l'ordre de grandeur de la taille du noyau } d \sim 10^{-15} \text{ m}$$

$\lambda \sim d$ donc ces protons peuvent servir à créer des isotopes car leur nature ondulatoire à cette échelle se manifeste. On étudie ces protons à l'aide de la mécanique quantique

Conclusion: on note d : taille du système

et $\lambda = \frac{h}{m v}$: longueur d'onde de la particule

Cas où $\lambda \ll d$: on applique les lois de la mécanique classique on néglige le comportement ondulatoire de la particule

On donne les conditions initiales (soit vitesse et position de la particule)

On affiche le PFD ou le TMC et on peut calculer à tout instant la position et la vitesse de la particule il y a déterminisme

La nature ondulatoire de la particule ne se manifeste pas.

Cas où $\lambda \approx d$: on applique les lois de la mécanique quantique

On parle d'absence de déterminisme :

pour des conditions initiales données et des forces données, il n'est pas possible de prévoir la position et la vitesse de la particule au cours du temps

On parle de probabilité de présence:

on ne peut que calculer la probabilité que la particule se trouve en M à l'instant t

Les énergies, vitesse... sont quantifiées et la nature ondulatoire de la corpuscule se manifeste

II. Fonction d'onde d'une particule

♡ //

La particule est entièrement caractérisée par une onde caractérisée par la fonction complexe $\psi(x, t)$ appelée fonction d'onde (cette fonction est un nombre complexe dépendant du temps et de l'espace).

Sens physique de la fonction d'onde:

Cette fonction d'onde est liée à la probabilité de présence de la particule à l'instant t par:

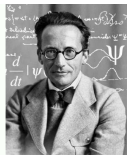
♡

$$dP = |\psi(x, t)|^2 dx = \psi(x, t) \psi^*(x, t) dx : \text{probabilité que la particule se trouve entre } x \text{ et } x + dx \text{ à l'instant } t$$
$$\frac{dP}{dx} = |\psi(x, t)|^2 : \text{densité de probabilité en } x \text{ à l'instant } t$$
$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x, t)|^2 dx : \text{probabilité que la particule se trouve entre } x_1 \text{ et } x_2 \text{ à l'instant } t$$

On en déduit l'unité de $\psi(x, t)$:

$$[\psi] = \left[\sqrt{\frac{dx}{dx}} \right] = m^{-1/2}$$

Equation vérifiée par la fonction d'onde:



Cette fonction d'onde vérifie l'équation de Schrödinger conçue en 1925, équation qui traduit la conservation de l'énergie:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + U(x) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t)$$

m est la masse de la particule

$\hbar = 10^{-34} \text{ J.s}$ est $\hbar = \frac{h}{2\pi}$: cette réduite de Planck

$U(x)$ est l'énergie potentielle de la particule en x
en physique quantique elle s'appelle potentiel de la particule

L'équation de Schrödinger traduit la conservation de l'énergie mécanique:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ est l'E}_c, U \text{ est l'E}_p \text{ et } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \text{ est l'E}_m$$

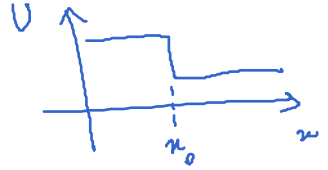
On trouve la fonction d'onde en résolvant l'équation de Schrödinger. L'équation de Schrödinger est une équation différentielle du second ordre en x , la solution de cette équation fait donc intervenir des constantes d'intégration que l'on trouve en utilisant les conditions aux limites et la condition de normalisation suivantes:

- La fonction d'onde est normalisée: $P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1$

- Soit un point x_0 qui présente une discontinuité de potentiel (soit $U(x = x_0^-) \neq U(x = x_0^+)$):

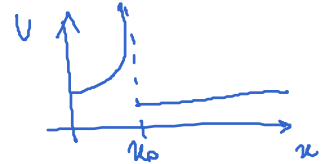
Dans le cas où, le potentiel est fini en x_0^+ et en x_0^- , la fonction d'onde $\underline{\psi}(x, t)$ est continue et sa dérivée partielle par rapport à x , $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)$ est continue, on écrira donc:

$$\psi(x_0^-, t) = \psi(x_0^+, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0^-, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x_0^+, t)$$



Dans le cas où le potentiel diverge en x_0^+ ou en x_0^- , la fonction d'onde $\underline{\psi}(x, t)$ est continue mais sa dérivée partielle par rapport à x , $\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)$, ne l'est pas, on écrira:

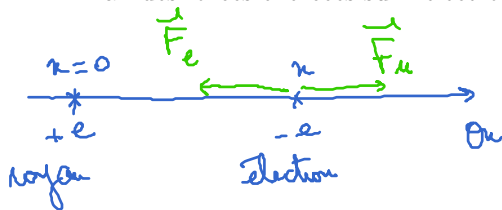
$$\psi(x_0^-, t) = \psi(x_0^+, t) = 0$$



- Dans une zone où le potentiel est infini, la particule a une probabilité de présence nulle: la fonction d'onde est nulle.

Illustration: prenons l'exemple de l'électron dans l'atome d'hydrogène. On suppose le noyau de charge $+e$ immobile en $x = 0$ et l'électron de charge $-e$ se déplace sur l'axe Ox , on repère sa position par l'abscisse $x > 0$.

Bilan des forces exercées sur l'électron:



L'électron subit la force électrique attractive.

$$\vec{F}_e = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad E_{pe} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x}$$

La force nucléaire répulsive:

$$\vec{F}_n \quad \text{conservatrice d'énergie potentielle} \quad E_{pn}$$

Du point de vue de la mécanique classique:

$$\vec{F} = - \text{grad } E_p = - \frac{dE_p}{dx} \vec{e}_x$$

$$E_p \downarrow \text{ pour } x < x_e : \frac{dE_p}{dx} < 0 \quad \text{donc} \quad \vec{F} > 0$$

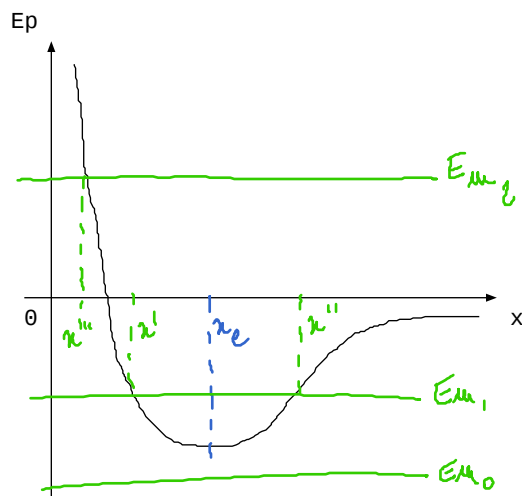
la force nucléaire répulsive l'emporte à courte distance

$$E_p \uparrow \text{ pour } x > x_e : \frac{dE_p}{dx} > 0 \quad \text{donc} \quad \vec{F} < 0$$

la force électrique attractive l'emporte à grande distance

$$E_m = E_c + E_p = \text{cte} \quad (\text{système conservatif})$$

≥ 0 donc le x^{min} n'est possible que pour $E_m \geq E_p$

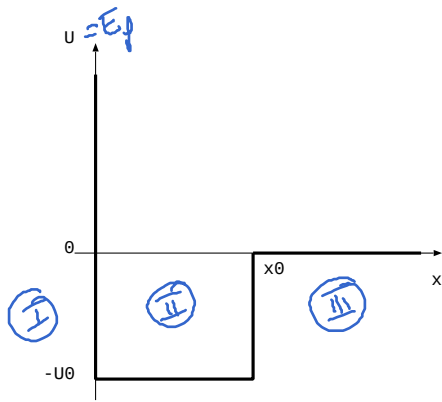


$E_m = E_{m0}$ est impossible

$E_m = E_{m1}$ est possible pour $x' \leq x \leq x''$:
électron piégé ou confiné (état lié)

$E_m = E_{m2}$ est possible pour $x \geq x''$:
l'électron peut quitter l'attraction du noyau (état de diffusion)

Modélisation de ce potentiel (celle-ci sera donnée dans l'énoncé des exercices):



$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour } x < 0 & \textcircled{I} \\ -U_0 & \text{pour } 0 < x < x_0 & \textcircled{II} \\ 0 & \text{pour } x > x_0 & \textcircled{III} \end{cases}$$

$\Psi_I(x, t) = 0$ la particule ne peut pas se trouver là où le potentiel est ∞

$$\Psi_{II} \text{ vérifie : } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_{II}}{\partial x^2} + (-U_0) \Psi_{II} = i\hbar \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial t}$$

$$\Psi_{III} \text{ " : } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_{III}}{\partial x^2} + 0 \times \Psi_{III} = i\hbar \frac{\partial \Psi_{III}}{\partial t}$$

Conditions aux limites :

$$\Psi_{II}(0, t) = \Psi_I(0, t) = 0$$

$$\Psi_{II}(x_0, t) = \Psi_{III}(x_0, t) \text{ et } \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial x}(x_0, t) = \frac{\partial \Psi_{III}}{\partial x}(x_0, t)$$

Exemple : on donne la fonction d'onde d'un électron soumis au potentiel constant U et confiné dans le demi-espace $x > 0$: $\psi(x, t) = A e^{-x/a_0} e^{-\frac{i E_0 t}{\hbar}}$.

- Normaliser cette fonction d'onde et en déduire l'expression de A :

$$\int_0^\infty |\psi|^2 dx = 1 = \int_0^\infty A e^{-x/a_0} e^{-\frac{i E_0 t}{\hbar}} \times A e^{-x/a_0} e^{+\frac{i E_0 t}{\hbar}} dx = A^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2x}{a_0}} dx$$

la particule est qq part entre 0 et ∞ car $A^2 \left[-\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2x}{a_0}} \right]_0^\infty = A^2 \frac{a_0}{2} = 1$ donc $A = \sqrt{\frac{2}{a_0}}$

- Exprimer la probabilité pour que l'électron se trouve entre $x = 0$ et $x = \frac{a_0}{2}$.

$$\text{c'est } P = \int_0^{\frac{a_0}{2}} |\psi|^2 dx = \int_0^{\frac{a_0}{2}} A^2 e^{-\frac{2x}{a_0}} dx = \frac{2}{a_0} \left[-\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2x}{a_0}} \right]_0^{\frac{a_0}{2}} = (1 - e^{-1})$$

1. Conséquence 1 : théorème de superposition lié à la linéarité de l'équation de Schrödinger

Retour à l'analogie de l'expérience des fentes d'Young réalisée avec des électrons:

$\psi_1(x, t)$: fonction d'onde de l'électron en présence de la fente 1

$\psi_2(x, t)$: " " " la fente 2

$\psi(x, t)$: " " " des fentes 1 et 2

On a d'après la linéarité de l'équation de Schrödinger: $\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)$

$$\frac{dP}{dn} = |\Psi(u, t)|^2 = \Psi(u, t) \Psi^*(u, t) = (\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_1^* + \Psi_2^*)$$

$$= \underbrace{|\Psi_1|^2}_{\text{densité de probabilité de présence de l'é qui passe par la fente 1}} + \underbrace{|\Psi_2|^2}_{\text{idem pour la fente 2}} + \underbrace{(\Psi_1 \Psi_2^* + \Psi_2 \Psi_1^*)}_{\text{terme d'interférences qui explique la présence de franges à l'écran}}$$

analogue à la formule de Fresnel :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$$

terme d'interférences

2. Conséquence 2 : le déterminisme

En mécanique classique, on donne les forces qui agissent sur un point matériel et les conditions initiales de ce point matériel, on en déduit

la trajectoire unique de M par application de la RFD ou du TMC.

On parle de problème déterministe car pour des conditions initiales données on peut prévoir la trajectoire du point matériel.

En mécanique quantique, on ne connaît pas la position et la vitesse d'une particule à tout instant, on ne peut connaître que la probabilité de présence à un instant. Le problème n'est pas déterministe car pour des conditions initiales identiques, la particule peut suivre des trajectoires différentes.

III. Etats stationnaires (sur feuille)

IV. Vecteur densité de courant de probabilité

Il peut se faire que la probabilité de présence d'une particule ne soit pas nulle dans une région de l'espace et que malgré cela, la particule ne puisse pas aller dans cette région. Pour comprendre ce phénomène, on introduit une grandeur vectorielle appelée vecteur densité de courant de probabilité noté $\vec{J}(x, t)$.

Définition : la grandeur $\|\vec{J}(x, t)\| dt$ représente la probabilité que la particule traverse la surface en x entre t et $t + dt$.

Son expression est donnée par l'énoncé:

Expression générale : $\vec{J}(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} (\psi(x, t) \frac{\partial \psi^*}{\partial x}(x, t) - \psi^*(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t)) \vec{e}_x$.

Application : exprimer le vecteur densité de courant pour $\psi(x, t) = A e^{kx} e^{-iEt/\hbar}$.

on reconnaît ici une O.S. arrivante soit une onde évanescente que l'on trouve dans le domaine $E < V$

$$\psi^*(x, t) = A^* e^{kx} e^{+iEt/\hbar}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = k \psi \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = k \psi^*$$

donc $\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi k \psi^* - \psi^* (k \psi)) \vec{e}_x = \vec{0}$

Application : exprimer le vecteur densité de courant pour $\psi(x, t) = \underline{A} e^{i(kx - Et/\hbar)}$.

$$\psi^* = \underline{A}^* e^{-i(kx - Et/\hbar)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik \psi$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial x} = -ik \psi^*$$

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi (-ik \psi^*) - \psi^* (ik \psi) \right] \vec{e}_x = \frac{i\hbar}{2m} (-2ik |\psi|^2 \vec{e}_x)$$

$$\text{soit } \boxed{\vec{J} = \frac{\hbar k}{m} |\psi|^2 \vec{e}_x}$$

$$\text{avec } \frac{\hbar k}{m} = \frac{\hbar \omega}{m \lambda} = \frac{\hbar}{m \lambda} = v$$

Ré :

$$\text{soit } \vec{J} = |\psi|^2 v \vec{e}_x$$

$$\text{ou encore } \boxed{\vec{J} = \frac{d\psi}{dx} \vec{e}_x}$$

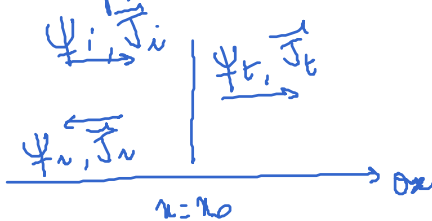
densité de probabilité : analogue à ρ

itesse de la particule

analogue avec les vecteurs densités de courant de masse, de charge, de particules : $\vec{J} = \rho \vec{v}$

Ré : dans les énoncés d'exercice on définit les coefficients de

réflexion et transmission :



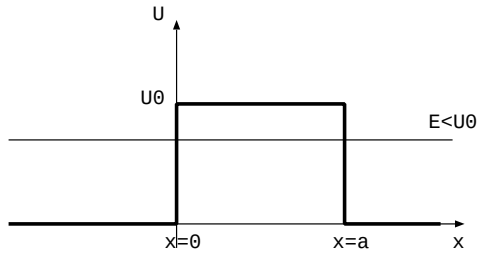
$$R = \frac{\|\vec{J}_r(x=x_0, t)\|}{\|\vec{J}_i(x=x_0, t)\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\vec{J}_t(x=x_0, t)\|}{\|\vec{J}_i(x=x_0, t)\|}$$

$R + T = 1$ traduit la conservation de la particule : elle est forcément quelque part

V. Effet tunnel

1. Qu'appelle-t-on une barrière de potentiel?

Modélisation:



Exemple : molécule NH_3 (on note x la distance moyenne entre le doublet non liant et l'azote)

2. Deux types de fonction d'onde

Les fonctions d'onde des états stationnaires sont de la forme:

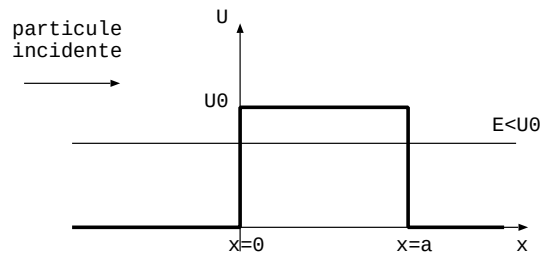
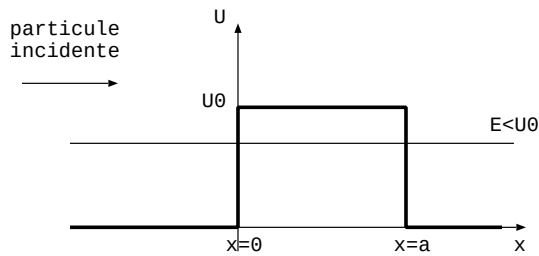
Elles vérifient l'équation de Schrödinger : $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{\psi}(x, t) + U \underline{\psi}(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi}(x, t)$

Ce qui conduit à l'équation différentielle vérifiée par $\phi(x)$:

Pour $E > U$:

Pour $E < U$:

3. Application à barrière de potentiel



La probabilité que la particule soit transmise est d'autant plus grande que:

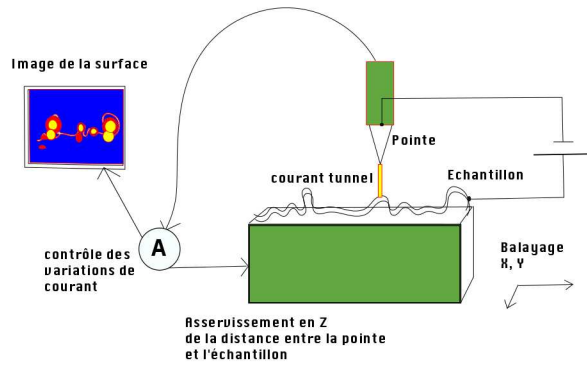
-

-

Conclusion : l'effet tunnel désigne la propriété que possède un objet quantique de franchir une barrière de potentiel même si son énergie est inférieure à l'énergie minimale requise, franchissement impossible selon la mécanique classique. Généralement, la fonction d'onde d'une particule (dont le carré du module représente la densité de probabilité de présence) ne s'annule pas au niveau de la barrière, mais s'atténue à l'intérieur de la barrière de façon exponentielle. Si, à la sortie de la barrière de potentiel, la particule possède une probabilité de présence non nulle, elle peut traverser cette barrière. C'est une conséquence directe de la nature probabiliste de l'onde associée à l'évolution d'une particule quantique.

4. Application 1 : le microscope à effet tunnel

Le microscope à effet tunnel, inventé en 1981, sert à déterminer la morphologie de surfaces conductrices ou semi-conductrices avec une résolution spatiale inférieure à la taille des atomes. Une pointe conductrice est placée en face de la surface à étudier. Elle permet le passage d'un courant résultant du passage d'électrons par effet tunnel depuis la surface jusqu'à la pointe. Ce courant très faible (de l'ordre du nA ou du pA) nécessite un dispositif d'amplification. L'intensité de ce courant dépend de la distance entre la surface et la pointe. On utilise un système d'asservissement qui positionne la pointe de façon à ce que le courant garde toujours la même valeur, ce qui correspond à une distance surface-pointe constante. On peut alors reconstituer le profil de la surface analysée. Ce microscope nécessite une surface conductrice, pour un matériau isolant on utilise un microscope à force atomique.

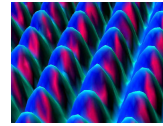


Ordres de grandeur :

distance pointe-échantillon : 1 nm

intensité du courant électrique : 1 nA

tension appliquée : 100 mV



5. Application 2 : la radioactivité alpha

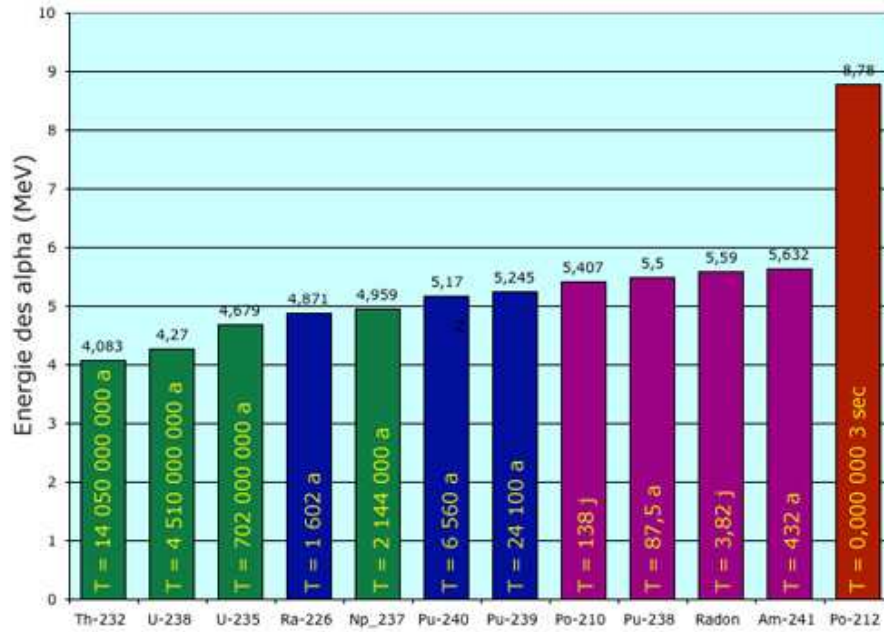
La radioactivité α correspond à la désintégration d'un noyau lourd en un noyau plus léger avec émission d'une particule α : He_2^4 .

La réaction nucléaire s'écrit: $X_Z^A \rightarrow$

où A est le nombre de masse :

où Z est le numéro atomique :

L'énergie libérée par cette réaction nucléaire est sous forme d'**énergie cinétique** pour la particule α (le noyau prend une partie très infime de cette énergie cinétique). L'énergie de la particule α est unique pour une désintégration donnée. On donne l'énergie libérée et les périodes radioactives de différents noyaux:

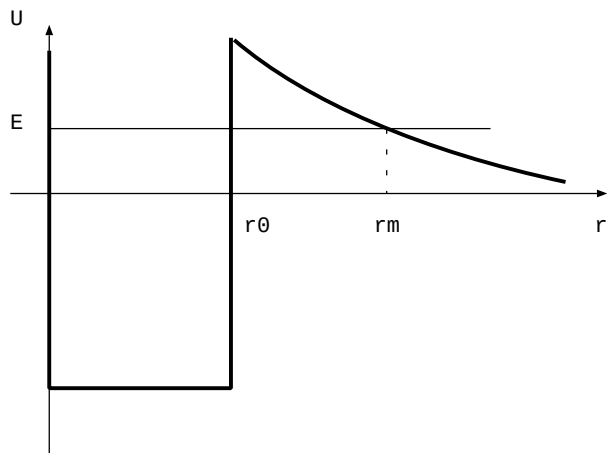


La particule α a pour masse $m = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, justifier par un calcul que la radioactivité α peut s'expliquer par un traitement quantique.

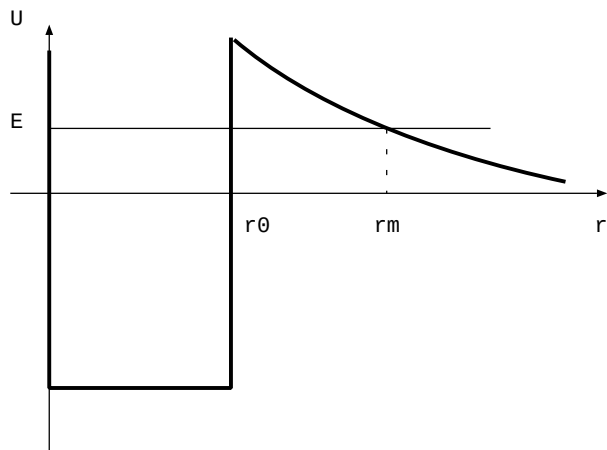
On considère le système particule α et noyau fils Y_{Z-2}^{A-4} . On modélise son énergie potentielle par la fonction suivante. On note r la distance entre la particule α et le noyau fixe immobile en O (le noyau fixe est supposé immobile car

Les forces exercées sur la particule α sont:

Commenter ce modèle et préciser ce que prévoit la mécanique classique.



Que prévoit la physique quantique? En quoi ce modèle permet d'interpréter le fait que la durée de vie d'un noyau radioactif est une fonction décroissante de l'énergie de la particule α libérée?



VI. Etude d'une particule libre

Soit une particule libre de masse m , de vitesse v , d'énergie E et d'énergie potentielle nulle. Cette particule se déplace sur l'axe Ox . On note $k = \frac{2\pi}{\lambda_{DB}}$, le vecteur d'onde associé à la particule.

Exprimer sa quantité de mouvement en fonction de $\hbar$ et k .

Exprimer son énergie E en fonction de $\hbar$, m et k .

On cherche la fonction d'onde sous la forme d'une OPPH: $\underline{\psi}(x, t) = Ce^{i(kx - \omega t)}$.

Vérifier qu'il s'agit bien d'un état stationnaire.

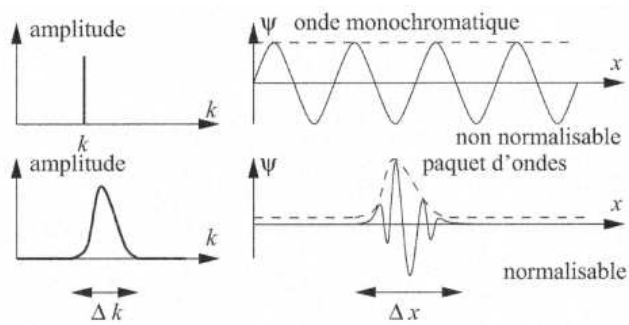
On donne l'équation de Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{\psi}(x, t) + U(x) \underline{\psi}(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{\psi}(x, t)$.

Exprimer $\hbar\omega$ en fonction de $\hbar$, m et k . En déduire ce que représente $\hbar\omega$. Commenter.

En déduire la relation de dispersion puis la vitesse de phase puis la vitesse de groupe en fonction de la vitesse de la particule. Conclure.

Ecrire la normalisation de la particule. Conclure.

Une particule libre est donc mieux représenté par un paquet d'onde soit:



On retient l'inégalité d'Heisenberg aussi appelée relation d'indétermination:

Comment évolue le paquet d'onde au cours du temps?

Exemple: On considère que l'état d'une particule quantique libre est représenté par un paquet d'ondes gaussien formé d'ondes planes progressives, dont les vecteurs d'ondes sont distribués autour d'une valeur moyenne k_0 avec une dispersion Δk , qui détermine l'extension spatiale initiale Δx_0 du paquet d'ondes à l'instant initial $t = 0$ autour de la position x_0 . La pulsation moyenne correspondant à k_0 est notée ω_0 . On suppose que l'état étudié ici vérifie à l'instant initial $t = 0$: $\Delta x_0 \cdot \Delta k_0 = \frac{1}{2}$.

1- Exprimer la vitesse de groupe en fonction de $\hbar$, k et m .

2- Montrer que la largeur $\Delta x(t)$ du paquet d'onde à l'instant t s'écrit $\Delta x(t) = \Delta x_0 + \frac{\hbar t}{2m\Delta x_0}$. En déduire l'instant t_f pour lequel la largeur du paquet d'onde a doublé.

Application numérique: $\hbar = 1,0 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$. Calculer t_f pour:

- un électron, de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, initialement confiné dans un atome $\Delta x_0 = 10^{-10} \text{ m}$
- une gouttelette d'eau, de rayon égal à $10 \mu\text{m}$ et de masse $m = 4 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$.