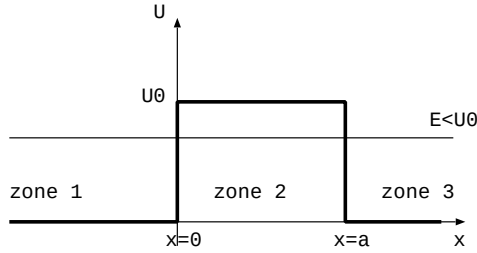


# TD 2 physique quantique

## I. Effet tunnel

Soit une particule de masse  $m$  et d'énergie  $E$ , venant de  $-\infty$  et soumise au potentiel  $U(x)$  suivant:



La recherche d'états stationnaires de la forme  $\psi(x,t) = \phi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$  solutions de l'équation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi(x,t) \text{ conduit à:}$$

$$\phi_1(x) = \underline{A}_1 e^{ikx} + \underline{A}_2 e^{-ikx}$$

$$\phi_2(x) = \underline{B}_1 e^{k'x} + \underline{B}_2 e^{-k'x}$$

$$\phi_3(x) = \underline{C}_1 e^{ikx} + \underline{C}_2 e^{-ikx}$$

1. Montrer que du point de vue de la mécanique classique, la particule ne peut pas traverser la barrière de potentiel.

2. Exprimer  $k$  et  $k'$  en fonction de  $m$ ,  $E$ ,  $U_0$  et  $\hbar$ .

3. Justifier le fait que  $\underline{C}_2 = 0$ .

4. On définit les coefficients  $\underline{r} = \frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1}$  et  $\underline{\tau} = \frac{\underline{C}_1}{\underline{A}_1}$ . Que représentent ces coefficients?

5. Ecrire (sans les résoudre) les équations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée par rapport à  $x$ .

On rappelle que pour une OPPH, le vecteur densité de courant s'écrit  $\vec{j} = |\psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$ .

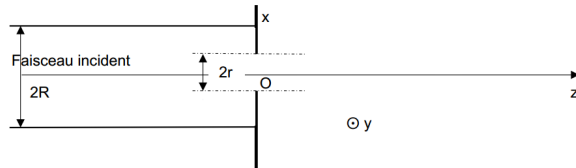
6. Ecrire le vecteur densité de courant  $\vec{j}_i$  de l'onde incidente et  $\vec{j}_t$  de l'onde transmise par la barrière de potentiel. En déduire l'expression du coefficient de transmission de la particule  $T = \frac{||\vec{j}_t||}{||\vec{j}_i||}$  en fonction de  $\underline{A}_1$  et  $\underline{C}_1$ .

7. La source  $S$  émet les particules avec un débit  $q_e = 10^5 \text{ s}^{-1}$ . La résolution numérique conduit à  $T = 0,04 \%$ . En déduire  $q_s$ , le débit de particules traversant la barrière de potentiel.

Réponses: 2-  $k' = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$  et  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  6-  $T = \frac{|\underline{C}_1|^2}{|\underline{A}_1|^2}$  7-  $q_s = 40 \text{ s}^{-1}$

## II. Diffraction

Un faisceau parallèle cylindrique de rayon  $R$  de longueur d'onde  $\lambda$  arrive face à un écran, perpendiculaire à l'axe du faisceau, percé d'un trou circulaire  $T_1$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  (inférieur à  $R$ ).



1. Rappeler pour un photon l'expression de sa quantité de mouvement  $p$  en fonction de sa longueur d'onde  $\lambda$ .

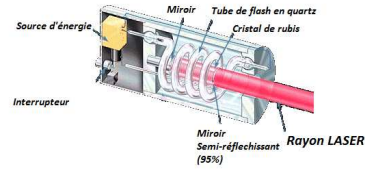
2. On donne la relation  $\Delta x \Delta p_x \leq \hbar$ . Donner son nom et en déduire qu'il y a forcément ouverture angulaire du faisceau. Commenter.

Réponses: 2-  $\Delta \theta \approx \frac{\lambda}{2r}$

### III. Laser à rubis

Un laser à rubis émet une radiation de longueur d'onde  $\lambda = 694,3 \text{ nm}$ . On admet que cette émission est due à la transition  $2 \rightarrow 1$  d'un électron confiné dans un puits infini de largeur  $a$ . Données :

$$m_e = 9.10^{-31} \text{ kg}, \hbar = \frac{h}{2\pi} = 10^{-34} \text{ J.s et}$$



1. Préciser la nature des fonctions d'onde de l'électron dans le puits infini. Déduire de la représentation graphique de ces ondes la relation donnant les longueurs d'onde de De Broglie de l'électron dans ce puits et en déduire ses énergies possibles.
2. Exprimer l'énergie libérée par l'électron qui effectue la transition  $2 \rightarrow 1$ . Déduire de la longueur d'onde de la lumière émise par le laser, la valeur numérique de  $a$ .

Réponse:  $a = 8.10^{-10} \text{ m}$

### IV. Particule dans un puits infini

Une particule de masse  $m$ , d'énergie  $E_n > 0$ , se déplaçant selon  $Ox$  est soumise à un potentiel  $U$  telle que:  $U = 0$  pour  $0 < x < a$  et  $U \rightarrow \infty$  pour  $x < 0$  et  $x > a$ . On écrit, pour  $x$  compris entre 0 et  $a$ , les fonctions d'onde sous la forme  $\psi_n(x, t) = \phi_n(x)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$ . On donne l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi(x, t). \text{ Donnée : } h = 6.10^{-34} \text{ J.s.}$$

1. Donner la fonction d'onde pour  $x < 0$  et  $x > a$ .
2. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par  $\phi_n(x)$  et la résoudre. Qu'appelle-t-on normaliser une fonction d'onde? Déterminer entièrement  $\phi_n(x)$  et représenter pour  $n = 1, 2$  et  $3$ , les fonctions  $\phi_n(x)$  et  $|\psi_n(x, t)|^2$ .  
On donne  $\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2}$ .
3. Exprimer  $E_n$ . Que se passe-t-il si  $a$  diminue?
4. A l'instant  $t = 0$ , la fonction d'onde de la particule s'écrit  $\underline{\psi}(x, t = 0) = A \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$ . Exprimer  $\underline{\psi}(x, t)$ .
5. A l'instant  $t = 0$ , la fonction d'onde de la particule s'écrit  $\underline{\psi}(x, t = 0) = C \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + D \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ . Exprimer  $\underline{\psi}(x, t)$ . Montrer que la particule oscille entre deux niveaux d'énergie, et exprimer la pulsation des oscillations.
6. Evaluer  $E_1$  pour un proton dans un noyau et pour un électron dans un atome. Données :  $m_e = 9.10^{-31} \text{ kg}$ ,  $m_p \approx 1000m_e$ ,  $\hbar = 10^{-34} \text{ J.s}$ .

$$\text{Réponses : } \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{ et } E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

### V. Champ de force appliqué à une particule

On considère une particule quantique astreinte à se déplacer sur l'axe  $Ox$  et soumise au champ de force  $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$  dont on cherche à déterminer l'expression. On donne la fonction d'onde de la particule:

$$\underline{\psi}(x, t) = Ae^{-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}} e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} \text{ avec } \omega_0 \text{ et } A \text{ deux constantes.}$$

$$\text{On rappelle l'équation de Schrödinger } i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi(x, t).$$

1. Donner les unités de  $\omega_0$  et  $A$ .
2. Déterminer  $A$ . Donnée:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$  pour  $\alpha > 0$ .
3. Déterminer  $U(x)$ , le potentiel de la particule et en déduire le champ de force  $\vec{F}$ . Commenter.

$$\text{Réponses: } A = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \text{ et } U(x) = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$$

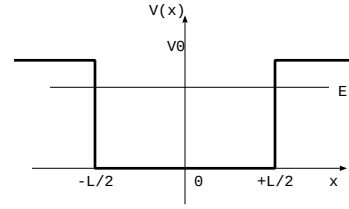
## VI. Puits de potentiel fini

Une particule de masse  $m$  et d'énergie  $E$  est placée dans un puits de potentiel  $U(x)$  tel que:

$U(x) = V_0 > 0$  pour  $x < -L/2$  région 1 et pour  $x > L/2$  région 3

$U(x) = 0$  pour  $-L/2 < x < L/2$  région 2

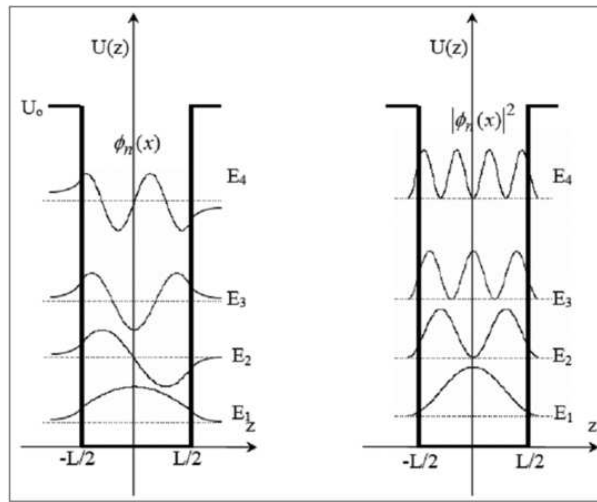
L'énergie de la particule est telle que  $E < U_0$ .



On cherche des états stationnaires sous la forme  $\psi(x, t) = \phi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ . On rappelle l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi(x, t).$$

1. On donne pour un tel puits l'allure des fonctions d'onde et des probabilités de présence. Tracer de la même façon, les fonctions d'onde et des probabilités de présence d'une particule dans un puits de potentiel infini. Signalez les différences et les points communs de ces deux types de puits.



2. Etablir les équations différentielles vérifiées par  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  et  $\phi_3(x)$ .

3. La résolution de ces équations différentielles conduit à:  $\phi_a(x) = A \cos(Kx) + B \sin(Kx)$ ,  $\phi_b(x) = C e^{kx}$  et  $\phi_c(x) = D e^{-kx}$ .

Préciser la région qui correspond à chacune de ces fonctions d'onde et exprimer  $k$  et  $K$  en fonction de  $m$ ,  $E$ ,  $\hbar$  et  $U_0$ .

4. Ecrire les équations de continuité et vérifier la cohérence avec les schémas des fonctions d'onde données dans la question 1.

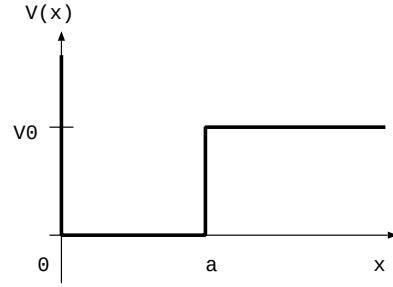
5. Commenter évolue le nombre de niveaux d'énergie lorsqu'on augmente  $U_0$ ? Observe-t-on une quantification de l'énergie pour  $E > U_0$ ?

## VII. Particule dans un puits semi-infini

Soit un électron de masse  $m$  et d'énergie  $E$  décrit par une fonction d'onde  $\psi(x, t) = \phi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$  qui se déplace dans le puits de potentiel suivant:

$$\begin{aligned} x < 0 : U(x) &\rightarrow \infty \text{ région 1} \\ 0 < x < a : U(x) &= 0 \text{ région 2} \\ x > a : U(x) &= U_0 > 0 \text{ région 3} \end{aligned}$$

Avec  $0 < E < U_0$



On donne l'équation de Schrödinger  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi(x, t)$ .

1. Préciser, en justifiant votre réponse, les valeurs de  $x$  accessibles pour l'électron dans le cadre de la mécanique classique.
2. Que dire de la fonction d'onde  $\psi_1(x, t)$  de l'électron dans la région 1?
3. Montrer que les parties spatiales des fonctions d'onde dans les régions 2 et 3 peuvent se mettre sous la forme  $\phi_2(x) = Ae^{ik_2x} + Be^{-ik_2x}$  et  $\phi_3(x) = Ce^{k_3x} + De^{-k_3x}$ . Exprimer  $k_2$  et  $k_3$  en fonction des données et montrer que l'une des constantes  $A, B, C$  ou  $D$  est nulle.
4. Quelle(s) équation(s) de continuité peut-on écrire en  $x = 0$ ? En déduire que  $\phi_2(x)$  peut se mettre sous la forme  $\phi_2(x) = A' \sin(k_2x)$ .

5. Quelle(s) équation(s) de continuité peut-on écrire en  $x = a$ ? En déduire que l'on a  $\tan(k_2a) = -\frac{k_2}{k_3} < 0$ .

6. On admet que les équations de continuité conduisent à la relation  $|\sin(k_2a)| = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0}} k_2$ . On propose de déterminer graphiquement les valeurs de  $k_2$  solutions de cette équation.

La courbe en annexe 1 est le résultat du code suivant:

```
V0,hbar,m,a=400*1.6E-19,1E-34,0.9E-31,2E-10
k2=np.linspace(.....,.....,1000)
plt.plot(k2,np.abs(np.sin(k2*a)))
plt.xlabel('k2(m-1)')
plt.grid()
plt.show()
```

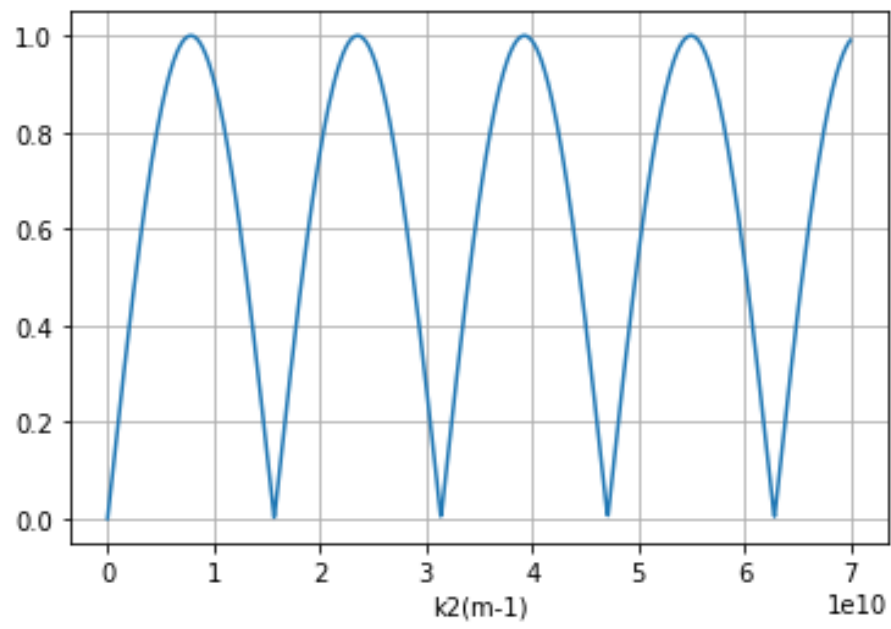
- 6.a. Déduire du code, les valeurs numériques de  $V_0, m$  et  $a$ .

- 6.b. On définit la fonction  $g(k_2) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0}} k_2$ . Ajouter en annexe 1 la courbe représentant  $g$  en fonction de  $k_2$  pour un électron dans le puits de potentiel étudié. Déduire du graphe, les valeurs de  $k_2$  solutions de l'équation  $|\sin(k_2a)| = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0}} k_2$ .

- 6.c. La condition  $\tan(k_2a) = -\frac{k_2}{k_3} < 0$  fait que certaines solutions trouvées précédemment sont à éliminer. On donne en annexe 2, la courbe représentant  $\tan(k_2a)$  en fonction de  $k_2$  (les droites verticales sur la courbe sont les asymptotes). Déduire des questions précédentes, les valeurs de  $k_2$  puis les valeurs de l'énergie  $E$  possibles pour  $U_0 = 400 \text{ eV}$ .

- 6.d. Comment évolue le nombre d'énergies possibles lorsqu'on augmente  $U_0$ ? Justifier en utilisant un raisonnement graphique.

Annexe 1:



Annexe 2:

