

Correction TD1 de mécanique quantique

I. Constante d'intégration nulle 1

1. Du point de vue de la mécanique classique, on a $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$ donc la particule ne peut exister que pour les valeurs de x pour lesquelles $E_m \geq E_p$ soit ici $E_m = E$ et $E_p = U$ donc la particule ne peut se trouver que dans la zone $x > 0$ (la région $z < 0$ est interdite).

2. La particule arrive de $+\infty$, on lui associe une $OPPH^-$ dans l'espace $x > 0$: c'est l'onde incidente. Elle donne naissance en $x = 0$ à une onde transmise du côté $x < 0$ et une onde réfléchie du côté $x > 0$. La discontinuité de potentiel se comporte comme un dioptre.

3. On a :

Pour $x < 0$: $\underline{\psi}_I(x, t) = \phi_I(x)e^{-iEt/\hbar} = A_I e^{-Kx} e^{-iEt/\hbar} + B_I e^{+Kx} e^{-iEt/\hbar}$: ce sont des OS amorties (ondes évanescentes). Or dans cette zone x peut tendre vers $-\infty$ et le terme e^{-Kx} diverge en $-\infty$ donc on doit avoir $A_I = 0$.

Pour $x > 0$: $\underline{\psi}_{II}(x, t) = \phi_{II}(x)e^{-iEt/\hbar} = A_{II} e^{-i(kx+Et/\hbar)} + B_{II} e^{i(kx-Et/\hbar)}$: ce sont des $OPPH$:

$OPPH^+$ (la particule et l'onde associée se propagent selon $+Ox$) pour le terme d'amplitude B_{II} : onde réfléchie

$OPPH^-$ (la particule et l'onde associée se propagent selon $-Ox$) pour le terme d'amplitude A_{II} : onde incidente.

4. Dans la région $x > 0$, on a $U = 0 < E$ soit l'équation différentielle $\underline{\phi}''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \underline{\phi}(x) = 0$: on reconnaît un OH de pulsation spatiale $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ (d'où les solutions en exponentielles complexes dans cette région).

Dans la région $x < 0$, on a $U = U_0 > E$ soit l'équation différentielle $\underline{\phi}''(x) - \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} \underline{\phi}(x) = 0$: ce n'est pas un OH, on pose $K = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$ et les solutions sont des exponentielles réelles.

II. Constante d'intégration nulle 2

1. Du point de vue de la mécanique classique, on a $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$ donc la particule ne peut exister que pour les valeurs de x pour lesquelles $E_m \geq E_p$ soit ici $E_m = E$ et $E_p = U$ donc la particule peut se trouver partout sur l'axe Ox .

2. La particule arrive de $+\infty$, on lui associe une $OPPH^-$ dans l'espace $x > 0$: c'est l'onde incidente. Elle donne naissance en $x = 0$ à une onde transmise du côté $x < 0$ et une onde réfléchie du côté $x > 0$. La discontinuité de potentiel se comporte comme un dioptre.

3. On a :

Pour $x < 0$: $\underline{\psi}_I(x, t) = \phi_I(x)e^{-iEt/\hbar} = A_I e^{-i(Et/\hbar + Kx)} + B_I e^{-i(Et/\hbar - Kx)}$: A_I est l'amplitude de l' $OPPH^-$ qui correspond à l'onde transmise. B_I est l'amplitude de l' $OPPH^+$ qui n'existe pas dans cette région soit $B_I = 0$.

Pour $x > 0$: $\underline{\psi}_{II}(x, t) = \phi_{II}(x)e^{-iEt/\hbar} = A_{II} e^{-i(kx+Et/\hbar)} + B_{II} e^{i(kx-Et/\hbar)}$: ce sont des $OPPH$:

B_{II} est l'amplitude de l' $OPPH^+$: onde réfléchie

A_{II} est l'amplitude de l' $OPPH^-$: onde incidente.

III. Constante d'intégration nulle 3

1. Du point de vue de la mécanique classique, on a $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$ donc la particule ne peut exister que pour les valeurs de x pour lesquelles $E_m \geq E_p$ soit ici $E_m = E$ et $E_p = U$ donc la particule peut exister partout sur l'axe Ox .

2. La particule est émise selon $+Ox$ à l'intérieur du puits, les discontinuités de potentiel se comportent comme des dioptres donc l'onde incidente selon $+x$ dans le puits donne naissance à une onde transmise du côté $x > L$ et une onde réfléchie dans le puits selon $-Ox$. Cette onde réfléchie donne naissance à une onde

transmise du côté $x < 0$ et une onde réfléchie dans le puits selon $+Ox$.

Donc finalement il y a des ondes selon $-Ox$ du côté $x < 0$, des ondes selon $+Ox$ du côté $x > L$ et des ondes selon $+Ox$ et $-Ox$ dans le puits.

3. On a :

Pour $x < 0$: $\underline{\psi}_I(x, t) = A_I e^{-i(Et/\hbar + Kx)} + B_I e^{-i(Et/\hbar - Kx)}$: $B_I = 0$ car c'est l'amplitude de l' $OPPH^+$ et elle n'existe pas de ce côté là.

Pour $0 < x < L$: $\underline{\psi}_I(x, t) = A_{II} e^{-i(kx + Et/\hbar)} + B_{II} e^{i(kx - Et/\hbar)}$: ce sont des $OPPH$, $OPPH^+$ (la particule et l'onde associée se propagent selon $+Ox$) pour le terme d'amplitude B_{II} et $OPPH^-$ (la particule et l'onde associée se propagent selon $-Ox$) pour le terme d'amplitude A_{II} .

Pour $x > L$: $\underline{\psi}_{III}(x, t) = A_{III} e^{-i(Et/\hbar + Kx)} + B_{III} e^{-i(Et/\hbar - Kx)}$: $A_{III} = 0$ car l' $OPPH^-$ n'existe pas dans cette région.

IV. Constante d'intégration nulle 4

1. Du point de vue de la mécanique classique, on a $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$ donc la particule ne peut exister que pour les valeurs de x pour lesquelles $E_m \geq E_p$ soit ici $E_m = E$ et $E_p = U$ donc la particule ne peut se trouver que dans la zone $0 < x < L$ (les régions $z < 0$ et $z > L$ sont interdites).

2. La particule est émise selon $-Ox$ à l'intérieur du puits, les discontinuités de potentiel se comportent comme des dioptries donc l'onde incidente selon $-Ox$ dans le puits donne naissance à une onde transmise du côté $x < 0$ et une onde réfléchie dans le puits selon $+Ox$. Cette onde réfléchie donne naissance à une onde transmise du côté $x > L$ et une onde réfléchie dans le puits selon $-Ox$.

Donc finalement il y a des ondes selon $-Ox$ du côté $x < 0$, des ondes selon $+Ox$ du côté $x > L$ et des ondes selon $+Ox$ et $-Ox$ dans le puits.

3. On a :

Pour $x < 0$: $\underline{\psi}_I(x, t) = A_I e^{-Kx} e^{-iEt/\hbar} + B_I e^{+Kx} e^{-iEt/\hbar}$: ce sont des OS amorties (ondes évanescentes). Or dans cette zone x peut tendre vers $-\infty$ et le terme e^{-Kx} diverge en $-\infty$ donc on doit avoir $A_I = 0$.

Pour $0 < x < L$: $\underline{\psi}_I(x, t) = A_{II} e^{-i(kx + Et/\hbar)} + B_{II} e^{i(kx - Et/\hbar)}$: ce sont des $OPPH$, $OPPH^+$ (la particule et l'onde associée se propagent selon $+Ox$) pour le terme d'amplitude B_{II} et $OPPH^-$ (la particule et l'onde associée se propagent selon $-Ox$) pour le terme d'amplitude A_{II} .

Pour $x > L$: $\underline{\psi}_{III}(x, t) = A_{III} e^{-Kx} e^{-iEt/\hbar} + B_{III} e^{+Kx} e^{-iEt/\hbar}$: ce sont des OS amorties (ondes évanescentes). Or dans cette zone x peut tendre vers $+\infty$ et le terme e^{+Kx} diverge en $+\infty$ donc on doit avoir $B_{III} = 0$.

V. Marche de potentiel 1

1. Du point de vue de la mécanique classique, on a $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$ donc $E_m \geq E_p$. Ici $E_m = E > E_p$ pour tout x donc la particule peut se trouver sur tout l'axe Ox .

On a $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_p)}{m}}$ soit pour $x < 0$: $E_p = 0$ donc $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ et pour $x > 0$: $E_p = V_0$ donc $v = \sqrt{\frac{2(E - V_0)}{m}}$.

Du point de vue quantique, du côté $x < 0$ il y a une onde incidente et une onde réfléchie, du côté $x > 0$ il y a une onde transmise.

2. En remplaçant $\psi(x, t)$ par $\psi(x, t) = \phi(x) e^{-iEt/\hbar}$ dans l'équation de Schrödinger, on obtient $\phi'' + \frac{2m(E - U)}{\hbar^2} \phi = 0$.

Pour $x < 0$: $U = 0$ donc $\phi_1(x)$ vérifie l'équation $\phi_1'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi_1 = 0$: c'est un OH de pulsation spatiale

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Pour $x > 0$: $U = V_0$ donc $\phi_2(x)$ vérifie l'équation $\phi_2'' + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \phi_2 = 0$: c'est un OH de pulsation spatiale

$$K = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}.$$

3. On a donc $\underline{psi}_1 = Ae^{-i(kx + \frac{Et}{\hbar})} + Be^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})}$;

- le terme d'amplitude A correspond à une $OPPH^-$ (onde et particule se déplaçant selon $-Ox$): c'est l'onde réfléchie

- le terme d'amplitude B correspond à une $OPPH^+$ (onde et particule se déplaçant selon $+Ox$): c'est l'onde incidente.

On a $\underline{psi}_2 = Ce^{-i(Kx + \frac{Et}{\hbar})} + De^{i(Kx - \frac{Et}{\hbar})}$;

-le terme d'amplitude C correspond à une $OPPH^-$ (onde et particule se déplaçant selon $-Ox$): elle n'existe pas donc $C = 0$

- le terme d'amplitude D correspond à une $OPPH^+$ (onde et particule se déplaçant selon $+Ox$): c'est l'onde transmise.

4. En $x = 0$ le potentiel est discontinu et fini donc en $x = 0$, $\underline{\psi}$ et donc $\underline{\phi}$ est continu ainsi que $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ soit $\underline{\phi}'$.

On a donc $\underline{\phi}_1(x = 0) = \underline{\phi}_2(x = 0)$ qui donne $A + B = D$.

On a aussi $\underline{\phi}'_1(x = 0) = \underline{\phi}'_2(x = 0)$ qui donne $-ikA + ikB = iKD$.

soit à résoudre le système: $B + A = D$ et $B - A = \frac{K}{k}D$.

On fait la somme: $2B = (1 + \frac{K}{k})D$ soit $D = \frac{2B}{1 + \frac{K}{k}} = \frac{2k}{k + K}B$.

On en déduit $A = D - B = \frac{k - K}{k + K}B$.

Analogie avec la réflexion et la transmission d'une onde em à la traversée d'un dioptre qui sépare les milieux d'indice n_1 et n_2 (paragraphe III chapitre EM11), on a trouvé $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $\tau = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$. Ici le coefficient de réflexion r est $\frac{A}{B}$ et le coefficient de transmission τ est $\frac{D}{B}$. On a $k = \frac{n_1\omega}{c}$ et $K = \frac{n_2\omega}{c}$.

5. La fonction d'onde incidente est $\underline{\psi}_i = Be^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})}$, la fonction d'onde réfléchie est $\underline{\psi}_r = Ae^{-i(kx + \frac{Et}{\hbar})}$ et la fonction d'onde transmise est $\underline{\psi}_t = De^{i(Kx - \frac{Et}{\hbar})}$.

On a $|\underline{\psi}_i|^2 = B^2$, $|\underline{\psi}_r|^2 = A^2$ et $|\underline{\psi}_t|^2 = D^2$.

Pour l'onde incidente: $\vec{k}_i = +k\vec{e}_x$, pour l'onde réfléchie: $\vec{k}_r = -k\vec{e}_x$ et pour l'onde transmise: $\vec{k}_t = +K\vec{e}_x$.

Soit $\vec{J}_i = \frac{\hbar B^2 k}{m}\vec{e}_x$, $\vec{J}_r = -\frac{\hbar A^2 k}{m}\vec{e}_x$ et $\vec{J}_t = \frac{\hbar D^2 K}{m}\vec{e}_x$.

On a donc les coefficient de réflexion et de transmission:

$R = \frac{A^2}{B^2} = (\frac{k - K}{k + K})^2$ et $T = \frac{D^2 K}{B^2 k} = \frac{4kK}{(k + K)^2}$.

La relation $R + T = 1$ traduit la conservation de la particule, la particule se trouve obligatoirement sur l'axe Ox .

VI. Marche de potentiel 2

1. Du point de vue de la mécanique classique, on a $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$ donc $E_m \geq E_p$. Ici $E_m = E > E_p$ pour $x < 0$ donc la particule peut se trouver du côté $x < 0$ et $E_m = E < E_p = V_0$ pour $x > 0$ donc la région $x > 0$ est interdite.

Du point de vue quantique, du côté $x < 0$ il y a une onde incidente et une onde réfléchie, du côté $x > 0$ il y a une onde transmise.

2. En remplaçant $\psi(x, t)$ par $\psi(x, t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}$ dans l'équation de Schrödinger, on obtient $\phi'' + \frac{2m(E - U)}{\hbar^2}\phi = 0$.

Pour $x < 0$: $U = 0$ donc $\phi_1(x)$ vérifie l'équation $\phi_1'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi_1 = 0$: c'est un OH de pulsation spatiale

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Pour $x > 0$: $U = V_0$ donc $\phi_2(x)$ vérifie l'équation $\phi_2'' - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \phi_2 = 0$: ce n'est une OH, on pose

$$K = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \text{ (ce n'est pas une pulsation mais c'est homogène à une pulsation spatiale).}$$

$$3. \quad \phi_1 = \underline{A}_1 e^{ikx} + \underline{B}_1 e^{-ikx}.$$

$$\text{On a donc } \underline{psi}_1 = \underline{A}_1 e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})} + \underline{B}_1 e^{-i(kx + \frac{Et}{\hbar})}.$$

- le terme d'amplitude $\underline{B}_1$ correspond à une $OPPH^-$ (onde et particule se déplaçant selon $-Ox$): c'est l'onde réfléchie

- le terme d'amplitude $\underline{A}_1$ correspond à une $OPPH^+$ (onde et particule se déplaçant selon $+Ox$): c'est l'onde incidente.

On a $\phi_2 = \underline{A}_2 e^{+Kx} + \underline{B}_2 e^{-Kx}$: on se trouve dans la zone $x > 0$ donc x peut tendre vers $+\infty$ et e^{Kx} donc on doit avoir $A_2 = 0$ soit $\underline{psi}_2 = \underline{B}_2 e^{-Kx} e^{-iEt/\hbar}$: c'est l'onde transmise.

$$\text{On a donc } \underline{\psi}_i = \underline{A}_1 e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})}, \underline{\psi}_r = \underline{B}_1 e^{-i(kx + \frac{Et}{\hbar})} \text{ et } \underline{psi}_t = \underline{B}_2 e^{-Kx} e^{-iEt/\hbar}.$$

4. En $x = 0$ le potentiel est discontinu et fini donc en $x = 0$, $\underline{\psi}$ et donc $\underline{\phi}$ est continu ainsi que $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ soit $\underline{\phi}'$.

$$\text{On a donc } \underline{\phi}_1(x=0) = \underline{\phi}_2(x=0) \text{ qui donne } \underline{A}_1 + \underline{B}_1 = \underline{B}_2.$$

$$\text{On a aussi } \underline{\phi}'_1(x=0) = \underline{\phi}'_2(x=0) \text{ qui donne } ik\underline{A}_1 - ik\underline{B}_1 = K\underline{B}_2.$$

soit à résoudre le système: $\underline{A}_1 + \underline{B}_1 = \underline{B}_2$ et $ik(\underline{A}_1 - \underline{B}_1) = K\underline{B}_2$ soit encore $-K(\underline{A}_1 + \underline{B}_1) = -K\underline{B}_2$ et $ik(\underline{A}_1 - \underline{B}_1) = K\underline{B}_2$, je fais la somme:

$$(ik + K)\underline{A}_1 = (ik - K)\underline{B}_1 \text{ soit } \underline{r} = \frac{ik + K}{ik - K}.$$

On a $|\underline{r}| = 1$ ce qui veut dire que les ondes incidente et réfléchie ont la même amplitude mais sont déphasées.

Analogie avec la réflexion et la transmission d'une onde em à la traversée d'un dioptré qui sépare les milieux d'indice n_1 et $n_2 = -in''$ (paragraphe IV chapitre EM11).

5. $||\vec{J}(x, t)dt||$ est la probabilité que la particule traverse la surface placée en x entre t et $t + dt$.

Remarque: $|\psi|^2 dx$ est la probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$. En physique quantique, la particule peut avoir une probabilité non nulle de se trouver dans une région et pourtant elle ne peut pas aller dans cette région, c'est le vecteur densité de courant qui nous donne cette information.

6. On cherche l'expression du vecteur densité de courant pour l'onde incidente: la fonction d'onde incidente est $\underline{psi}_i = \underline{B}_1 e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})}$.

$$\text{On a donc } \underline{psi}_i^* = \underline{B}_1^* e^{-i(kx - \frac{Et}{\hbar})}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = ik\underline{\psi}_i \text{ et } \frac{\partial \psi_i^*}{\partial x} = -ik\underline{\psi}_i^*.$$

$$\text{On a alors } \vec{J}_i = \frac{i\hbar}{2m} (\underline{\psi}_i (-ik\underline{\psi}_i^*) - \underline{\psi}_i^* (ik\underline{\psi}_i)) \vec{e}_x = \frac{\hbar k}{m} |\underline{\psi}_i|^2 \vec{e}_x \text{ (}\vec{J}_i \text{ est selon } Ox \text{ puisque l'onde incidente, comme la particule associée, se déplace selon } +Ox \text{).}$$

En procédant de la même façon pour l'onde réfléchie de fonction d'onde $\underline{psi}_r = \underline{A}_1 e^{-i(kx + \frac{Et}{\hbar})}$, on trouve $\vec{J}_r = -\frac{\hbar k}{m} |\underline{\psi}_r|^2 \vec{e}_x$ ($\vec{J}_r$ est selon $-Ox$ puisque l'onde réfléchie, comme la particule associée, se déplace selon $-Ox$).

$$\text{On a } |\underline{\psi}_i|^2 = |\underline{B}_1|^2 \text{ et } |\underline{\psi}_r|^2 = |\underline{A}_1|^2.$$

Pour l'onde incidente: $\vec{k}_i = +k\vec{e}_x$ et pour l'onde réfléchie: $\vec{k}_r = -k\vec{e}_x$.

$$\text{Soit } \vec{J}_i = \frac{\hbar B^2 k}{m} \vec{e}_x \text{ et } \vec{J}_r = -\frac{\hbar A^2 k}{m} \vec{e}_x.$$

On a donc le coefficient de réflexion: $R = \frac{|\underline{A}_1|^2}{|\underline{B}_1|^2} = |\underline{r}|^2 = 1$: la particule est fait donc toujours demi tour en $x = 0$, la zone $x > 0$ lui est aussi interdite du point de vue quantique.

7. On cherche l'expression du vecteur densité de courant pour l'onde transmise: la fonction d'onde est $\underline{\psi}_t = \underline{B}_2 e^{-Kx} e^{-iEt/\hbar}$.

On a donc $\underline{\psi}_t^* = \underline{B}_2^* e^{-Kx} e^{iEt/\hbar}$.

Ainsi $\frac{\partial \underline{\psi}_t}{\partial x} = -K \underline{\psi}_t$ et $\frac{\partial \underline{\psi}_t^*}{\partial x} = -K \underline{\psi}_t^*$.

On a alors $\vec{J}_t = \frac{i\hbar}{2m} (\underline{\psi}_t (-K \underline{\psi}_t^*) - \underline{\psi}_t^* (-K \underline{\psi}_t)) \vec{e}_x = \vec{0}$: cela traduit que la particule ne peut pas aller dans la zone $x > 0$ soit $T = 0$.

VII. Particule dans un puits de potentiel

1. Du point de vue de la mécanique classique, on a $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$ donc la particule ne peut exister que pour les valeurs de x pour lesquelles $E_m \geq E_p$ soit ici $E_m = E$ et $E_p = U$ donc la particule ne peut se trouver que dans la zone $0 < x < L$ (les régions $z < 0$ et $z > L$ sont interdites).

2. La normalisation traduit que la particule se trouve obligatoirement sur l'axe Ox donc la probabilité de trouver la particule selon Ox vaut 1 soit $\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\psi}|^2 dx = 1$.

Or ici le potentiel est infini pour $x < 0$ donc la fonction d'onde est nulle pour $x < 0$ soit $\int_0^{+\infty} |\underline{\psi}|^2 dx = 1$ ou encore $\int_0^L |\underline{\psi}|^2 dx + \int_L^{+\infty} |\underline{\psi}|^2 dx = 1$ soit $\int_0^L (\frac{1}{\sqrt{L}} \sin(\frac{Kx}{L}))^2 dx + \int_L^{+\infty} (\frac{A}{\sqrt{L}} e^{-x/L})^2 dx = 1$. On ne demande pas de résoudre.

Les conditions aux limites sont:

Pour $x = 0$ (le potentiel diverge du côté $x < 0$) donc on doit avoir uniquement la continuité de $\phi(x)$ soit $\phi(x = 0^-) = 0$ et $\phi(x = 0^+) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(\frac{K0}{L}) = 0$: continuité vérifiée.

Pour $x = L$ (le potentiel ne diverge pas) donc on doit avoir la continuité de $\phi(x)$ et de $\phi'(x)$ soit:

- $\phi(x = L^-) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(\frac{KL}{L}) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin K = \frac{0,897}{\sqrt{L}}$ et $\phi(x = L^+) = \frac{A}{\sqrt{L}} e^{-L/L} = \frac{Ae^{-1}}{\sqrt{L}} = \frac{0,897}{\sqrt{L}}$: continuité vérifiée.

- $\phi'(x = L^-) = \frac{K}{L\sqrt{L}} \cos(\frac{KL}{L}) = \frac{K}{L\sqrt{L}} \cos K = \frac{-0,897}{L\sqrt{L}}$ et $\phi'(x = L^+) = \frac{-A}{L\sqrt{L}} e^{-L/L} = \frac{-Ae^{-1}}{L\sqrt{L}} = \frac{-0,897}{L\sqrt{L}}$: continuité vérifiée.

Dans la zone $0 < x < L$ on a $\underline{\psi}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(\frac{Kx}{L}) e^{-iEt/\hbar}$ et $U = 0$. On remplace dans l'équation de

Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} + 0 = i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t}$.

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial x} = \frac{K}{L\sqrt{L}} \cos(\frac{Kx}{L}) e^{-iEt/\hbar} \text{ et } \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} = \frac{-K^2}{L^2\sqrt{L}} \sin(\frac{Kx}{L}) e^{-iEt/\hbar} = -\frac{K^2}{L^2} \underline{\psi}.$$

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \underline{\psi}.$$

Soit en remplaçant dans l'équation de Schrödinger : $-\frac{\hbar^2}{2m} (-\frac{K^2}{L^2} \underline{\psi}) = i\hbar (-\frac{iE}{\hbar}) \underline{\psi}$ soit $E = \frac{\hbar^2 K^2}{2mL^2} = \frac{h^2}{8\pi^2 mL^2}$.

On fait la même chose dans la zone $x > L$ où $\underline{\psi}(x, t) = \frac{A}{\sqrt{L}} e^{-x/L} e^{-iEt/\hbar}$ et $U = U_0$. On remplace dans

l'équation de Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} + U_0 \underline{\psi} = i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t}$.

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial x} = \frac{-A}{L\sqrt{L}} e^{-x/L} e^{-iEt/\hbar} \text{ et } \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2} = \frac{A}{L^2\sqrt{L}} e^{-x/L} e^{-iEt/\hbar} = \frac{1}{L^2} \underline{\psi}.$$

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \underline{\psi}.$$

Soit en remplaçant dans l'équation de Schrödinger : $-\frac{\hbar^2}{2m} (\frac{1}{L^2} \underline{\psi}) + U_0 \underline{\psi} = i\hbar (-\frac{iE}{\hbar}) \underline{\psi}$ soit $\frac{-\hbar^2}{2mL^2} + U_0 = E$.