

III) État stationnaire

Définition : un état est dit stationnaire lorsque la probabilité de présence ne dépend pas du temps. La fonction d'onde d'un état stationnaire est de la forme : $\Psi(x,t) = \underbrace{\psi(x)}_{\text{partie spatiale de la fonction d'onde}} e^{-iEt/\hbar}$

où E est l'énergie (mécanique de la particule).

Rq: on a bien : $\frac{dP}{dx} = |\Psi(x,t)|^2 = |\psi(x)|^2$: indépendant du temps

Equation vérifiée par $\psi(x)$: on remplace $\Psi(x,t)$ dans l'équation de Schrödinger :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \psi''(x) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\text{Soit } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \text{ donne : } -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + U(x) \psi(x) = i\hbar \left(-\frac{iE}{\hbar}\right) \psi(x)$$

$$\text{d'où } \boxed{\psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x)) \psi(x) = 0}$$

Attention : cette équation ressemble à celle d'un O.H., cela dépend du signe de $E - U$
on va donc distinguer 2 cas pour la résolution de cette équation : $E > U$ et $E < U$.
On ne résout cette équation que pour U constant.

Etude de $\psi(x)$ et $\Psi(x,t)$ dans le cas où $E > U$:

On part de me de la physique classique : $E = \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\geq 0} + U$ donc la particule ne peut

aller que dans les régions où $E \geq U$.

Le cas étudié ici ($E > U$) est donc un état accessible du point de vue classique.

Du point de vue quantique on résout : $\psi''(x) + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - U)}_{> 0} \psi(x) = 0$ c'est un O.H. de pulsation spatiale $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - U)}$

la solution s'écrit ici en notation complexe :

$$\boxed{\psi(x) = A e^{-ikx} + B e^{+ikx}}$$

pour interpréter cette solution et trouver A et B , il faut écrire la fonction d'onde :

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar} = A e^{-i\left(\frac{Et}{\hbar} + kx\right)} + B e^{-i\left(\frac{Et}{\hbar} - kx\right)}$$

solution en OPPH⁻ qui correspond à la fonction d'onde d'une particule se déplaçant selon $(-Ox)$

solution en OPPH⁺ qui correspond à la fonction d'onde d'une particule se déplaçant selon $(+Ox)$

Pour trouver les côtes d'intégration A et B, on utilise,
 * les équations de continuité : Ψ et $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ sont continus en $x=x_0$ lorsque $V(x_0^-)$ et $V(x_0^+)$ ne divergent pas
 Ψ est continue en $x=x_0$ lorsque $V(x_0^-)$ ou $V(x_0^+)$ diverge

* le mt de la particule :
 si dans la région étudiée, la particule ne peut se déplacer que selon $(+Ox)$: on a $A=0$
 " " " que selon $(-Ox)$: on a $B=0$

Les fonctions $\Psi(x)$ et $|\Psi(x,t)|^2 = |\Psi(x)|^2$ se représentent : c'est $\frac{dP}{dx}$: densité de probabilité de présence

Rq: $k = \sqrt{\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \times \frac{mv^2}{2}} = \frac{mv}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}$: on retrouve l'expression du vecteur d'onde d'une OPH
 $E = \frac{mv^2}{2} + U$

Etude de $\Psi(x)$ et $\Psi(x,t)$ dans le cas où $E < U$:

Du point de vue de la physique classique : $E = \frac{mv^2}{2} + U$: la particule ne peut se trouver que dans la zone où $E \geq U$
 Donc l'état $E < U$, n'est pas accessible du point de vue classique, cet état n'existe pas.

Du point de vue de la physique quantique, on résout : $\Psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\Psi(x) = 0$

on met l'éq. sous la forme :

$$\Psi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(U-E)\Psi(x) = 0$$

< 0
 ce n'est pas un O.H, on peut quand même $k = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}}$

Éq. caractéristique : $x^2 - k^2 = 0$ soit $x = \pm k$

d'où $\Psi(x) = C e^{kx} + D e^{-kx}$ B

On interprète cette solution avec $\Psi(x,t)$:

$$\Psi(x,t) = \Psi(x) e^{-iEt/\hbar} = \underbrace{C e^{-iEt/\hbar} e^{kx}}_{\text{O.S. qui ne peut pas exister si } x \text{ peut tendre vers } +\infty} + \underbrace{D e^{-iEt/\hbar} e^{-kx}}_{\text{O.S. qui ne peut pas exister si } x \text{ peut tendre vers } -\infty}$$

O.S. qui ne peut pas exister si x peut tendre vers $+\infty$

O.S. qui ne peut pas exister si x peut tendre vers $-\infty$

On détermine les constantes d'intégration C et D avec :

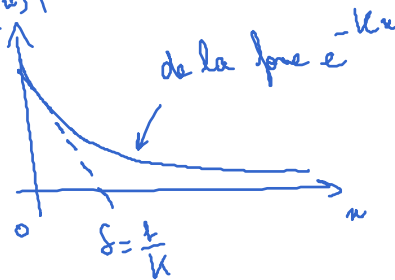
* les équations de continuité : ψ et $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ sont continues en x_0 tp V ne diverge pas en x_0^- ni en x_0^+

ψ est continue en x_0 tp $V(x_0^-)$ ou $V(x_0^+)$ diverge

* les hypothèses sur le w^{th} de la particule :

si la particule peut x trouver en $x \rightarrow +\infty$ on a $C=0$
 " " " " en $x \rightarrow -\infty$ on a $D=0$

représentation graphique : $|\psi(x)|$



la fonction d'onde tend rapidement vers zéro sur une distance caractéristique voisine de $5 \delta \approx \frac{5}{\kappa}$

.