

DS 8 de physique

Le sujet comprend trois problèmes indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numérotter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.

Il est demandé un effort de présentation (tirer un trait entre chaque question et encadrer les résultats) et de rédaction (prendre soin de nommer les lois utilisées, les hypothèses pour les appliquer et expliquer clairement).

I. Pb I: Blue Fire

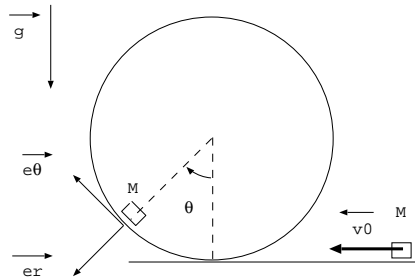
Le Blue Fire est l'une des montagnes russes du parc d'attraction Europa-Park, situé à Rust, en Allemagne. Elle est en service depuis le 4 avril 2009. Le nom de l'attraction a été choisi en référence à la couleur de la flamme émise par la combustion du gaz naturel, vecteur énergétique important. Cette montagne russe fait partie de la famille des montagnes russes lancées (launched coaster) : en effet, l'accélération principale du train a lieu dans la zone de départ, à l'aide d'une longue zone accélératrice rectiligne. Ce problème étudie le mouvement et l'arrivée du blue fire.

Partie A: le looping

Le train aborde un looping. On cherche à estimer à l'aide d'un modèle le temps mis par le train pour effectuer le looping. Pour cela, on va réduire l'étude du mouvement du train à celui de son centre de gravité, et on modélisera sa trajectoire par une trajectoire circulaire de rayon R . Cela revient donc à étudier le mouvement d'un point matériel M confondu avec G . On suppose dans ce modèle que l'action des rails sur M est normale aux rails pendant tout le mouvement, et on négligera tous les frottements. Au moment d'aborder le looping, le train possède la vitesse $v_0 = 27 \text{ m.s}^{-1}$ orientée comme sur la ci-dessous. On prendra $\theta(t = 0) = 0$.



looping réel



1. Etablir l'expression du vecteur accélération de M dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. On l'exprimera en fonction de $v = \|\vec{v}\|, R$ et $\frac{dv}{dt}$.
2. Sur trois schémas, représenter qualitativement le vecteur accélération de M pour $\theta = \pi/2, \theta = \pi$ et $\theta = 3\pi/2$. Justifier la construction.
3. Etablir l'équation différentielle liant $\ddot{\theta}$, à R, g et θ au cours du looping. Peut-on déterminer $\theta(t)$ de manière analytique (c'est-à-dire "à la main") facilement à partir de cette équation? Pourquoi?

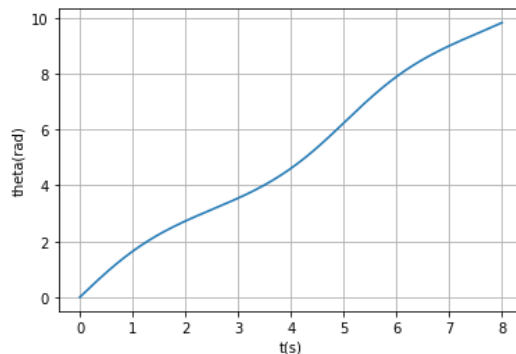
Pour estimer le temps nécessaire à la réalisation complète du looping, on propose de résoudre cette équation différentielle par un programme python en utilisant la méthode d'Euler.

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 R,v0,g=15,27,9.8
5 t=[0]
6 theta=[instruction 1]
7 thetapoint=[instruction 2]
8 dt=0.01
9 N= instruction 3
10 for i in range(N):
11     a= instruction 4
12     t.append(t[i]+dt)
13     thetapoint.append(thetapoint[i]+a*dt)
14     theta.append(instruction 5)
15 plt.plot(t,theta)
16 plt.grid()
17 plt.xlabel('t(s)')
18 plt.ylabel('theta(rad)')
19 plt.show()

```

En exécutant ce programme, on obtient le graphe suivant pour $\theta(t)$:



Dans le code on note $[t]$, $[theta]$ et $[thetapoint]$ les listes contenant les valeurs du temps, de $\theta(t)$ et de $\dot{\theta}(t)$ au cours de la simulation.

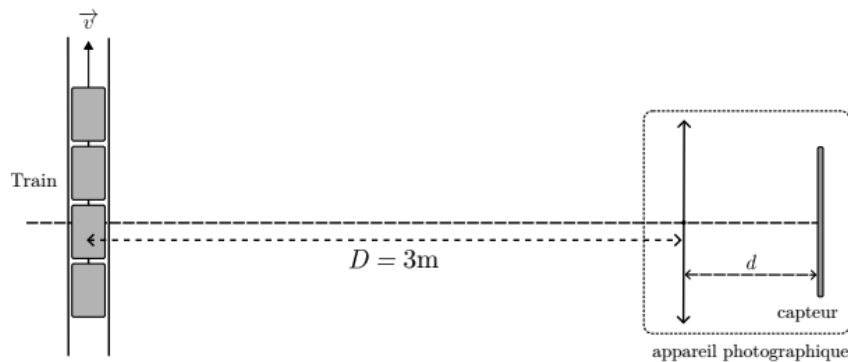
- Donner le contenu des instructions 1,2,3,4 et 5 en justifiant vos réponses.
- En déduire la valeur numérique du temps nécessaire pour effectuer le looping.

Partie B: l'arrivée

Lors de l'une des dernières figures, un appareil photographique numériquement placé prend des photos de chacune des voitures du train et de leurs passagers alors que le train est à grande vitesse. Les visiteurs peuvent ainsi acheter une photographie-souvenir de leur expérience dans le Blue Fire à la sortie.

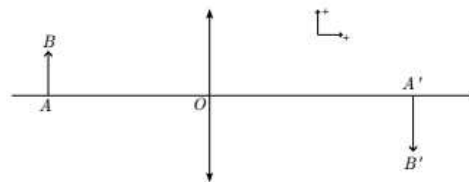


L'objectif de l'appareil utilisé sera modélisé par une simple lentille mince convergente, de distance focale $f' = 5,0 \text{ cm}$. Il est situé à $D = 3,0 \text{ m}$ du sujet à photographier au moment où la photographie est prise. Le capteur de l'appareil photographique, sur lequel se forme l'image, est une matrice rectangulaire de taille $L.l$ avec $L = 36 \text{ mm}$ et $l = 24 \text{ mm}$ constituée de pixels carrés de taille a . Le constructeur indique pour son capteur une résolution de 24 Mpixels. Pour décrire la situation, on se placera dans la configuration géométrique simplifiée suivante:



On notera en particulier que, même si le déplacement réel du train n'est pas orthogonal à l'axe optique de l'objectif, on fait ici cette hypothèse pour simplifier la description optique de la situation. Lors de la prise de la photographie, la vitesse de train est de $v = 15 \text{ m.s}^{-1}$.

On rappelle la formule de conjugaison de Descartes pour une lentille mince : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$ ainsi que la formule de grandissement algébrique $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$. Le schéma optique est représenté sur la figure 15.

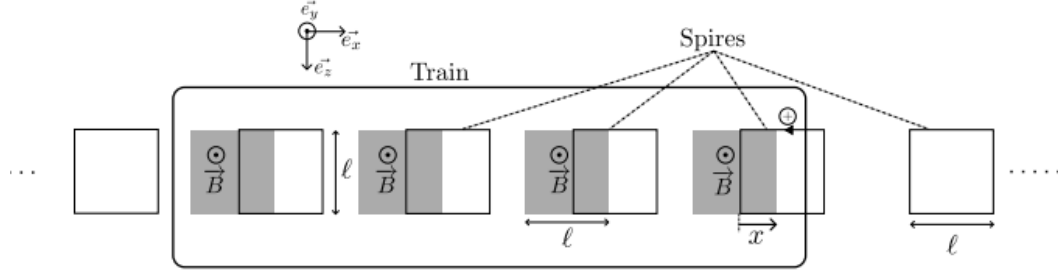


- Quelles sont les conditions optiques permettant un stigmatisme approché? Énoncer ces conditions.
- Déterminer avec deux chiffres significatifs la valeur numérique de la distance d entre le capteur et la lentille de l'objectif.
- Déterminer la valeur numérique de a .
- Montrer que si la durée d'exposition t_{exp} du capteur pendant la prise de la photographie est trop longue, la photo sera floue. Calculer un ordre de grandeur de cette durée maximale d'exposition pour obtenir une photographie nette en fonction des paramètres pertinents, et proposer une application numérique.

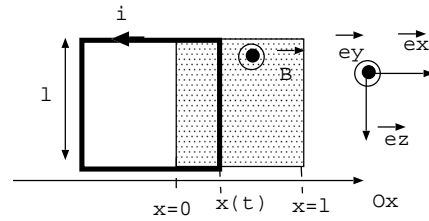
À la fin du trajet, le train doit être freiné. Pour éviter un freinage uniquement mécanique qui nécessiterait de fréquents remplacements des pièces en frottement, la solution adoptée par les concepteurs du Blue Fire est un freinage par induction.

Pour décrire ce freinage, on utilise la modélisation simplifiée suivante. Le mouvement du train sera étudié dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Pour ce freinage, des aimants sont posés sur les rails. Ces aimants créent des zones carrées de côté l distantes de l chacune, dans lesquelles règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_y$. On note m la masse totale du train. Sous le plancher des wagons du train, sont placées, perpendiculairement à \vec{B} , des spires carrées, de côté identique l et de résistance électrique R , régulièrement espacées entre elles de cette même distance l . On suppose que le train comporte N spires.



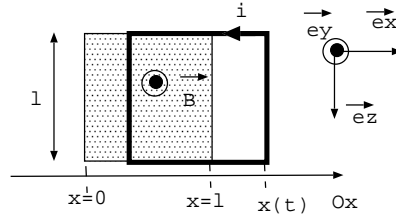
Dans un premier temps, on s'intéresse à l'interaction entre un seul aimant posé sur les rails et une seule spire du train, dont on négligera l'inductance propre. La zone de champ magnétique étudiée est placée entre $x = 0$ et $x = l$ et on note $x(t)$ la position de l'avant de la spire. On note i le courant dans la spire.



10. Décrire qualitativement mais précisément les phénomènes physiques qui se produisent permettant de freiner le train.

11. Déterminer l'expression de la force électromotrice induite dans la spire e en fonction de B , v et l . En déduire l'équation électrique liant B , v , l , R et l'intensité i dans la spire.

12. Montrer que tant que $0 < x < l$, la spire est soumise à une force qui se met sous la forme $\vec{F}_{aimant \rightarrow spire} = -\alpha v_e \vec{x}$ où $v(t)$ est la vitesse du train. Déterminer l'expression de α .



13. Montrer que pour $l < x < 2l$, la force $\vec{F}_{aimant \rightarrow spire}$ possède la même expression que précédemment. On considère maintenant l'interaction des aimants sur les rails (il y a des aimants sur toute la zone de freinage) avec les N spires fixes.

14. Quelle est alors la force totale $\vec{F}_{aimant \rightarrow train}$ s'exerçant sur la totalité du train? En déduire l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ tout au long de la phase de freinage, dont on définira la constante de temps τ en fonction des paramètres. Exprimer $v(t)$.

15. Que devient l'énergie cinétique perdue par le train lors de ce freinage? Justifier votre réponse par un calcul.

16. Justifier la nécessité d'un freinage mécanique d'appoint afin d'immobiliser complètement le train à la fin de son trajet.

II. Pb II: Dimensionnement d'un câble électrique

On s'intéresse à la dimension des câbles employés pour transporter l'énergie électrique des centrales au consommateur. On cherche à justifier le rayon R_c des câbles utilisés en début du réseau basse tension.

Pour cela, on adopte le modèle de Drude: un électron libre de charge $-e$ est soumis à la force qu'exerce un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) et à une force de frottement visqueux, modélisant les collisions, de la forme $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse des électrons, τ un temps de relaxation et m_e la masse d'un électron.

Un fil infini d'axe Oz et de rayon R_c est parcouru par un vecteur densité de courant \vec{j}_c . Le milieu, supposé électriquement neutre, contient n_0 électrons mobiles par unité de volume. Il est suffisamment dilué pour pouvoir négliger les interactions entre les différentes charges du milieu.

Le mouvement d'un électron du milieu conducteur est non relativiste et il est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. Ecrire les quatre équations de Maxwell en donnant leur nom dans ce milieu électriquement neutre dans lequel la densité volumique de charges est nulle.

2. Dans le modèle présenté ci-dessus, appliquer la deuxième loi de Newton à un électron du milieu et donner l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse \vec{v} . Faut-il prendre en compte le poids de l'électron ? Justifier. Données: $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

3. Dans ce milieu, justifier que la force magnétique subie par un électron est négligeable devant la force électrique. Simplifier alors l'équation du mouvement d'un électron.

On se place en régime permanent sinusoïdal et on note \vec{v} la vitesse de l'électron et \vec{j}_c le vecteur densité de courant dans ce régime. Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$.

4. Exprimer \vec{v} en fonction de e , \vec{E} , τ , m_e et ω . En déduire l'expression du vecteur densité de courant \vec{j}_c en fonction des mêmes variables et de n_0 .

5. Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale en fonction de \vec{j}_c , \vec{E} et de la conductivité γ . En déduire que la conductivité complexe $\underline{\gamma}$ en régime permanent sinusoïdal s'exprime: $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}$

Donner l'expression de γ_0 en fonction de n_0 , e , τ et m_e .

Un milieu conducteur tel que le câble étudié est caractérisé par un temps de relaxation de l'ordre de $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$ et une densité de porteurs de charge de l'ordre de $n_0 \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$. La fréquence du signal étudié est $f_r = 50 \text{ Hz}$.

6. Calculer γ_0 . Par des calculs d'ordre de grandeur, simplifier l'expression de $\underline{\gamma}$ ainsi que l'équation de Maxwell-Ampère. Donnée: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

7. On donne, pour tout champ vectoriel \vec{f} , $\text{rot}(\text{rot} \vec{f}) = \text{grad}(\text{div} \vec{f}) - \Delta \vec{f}$.

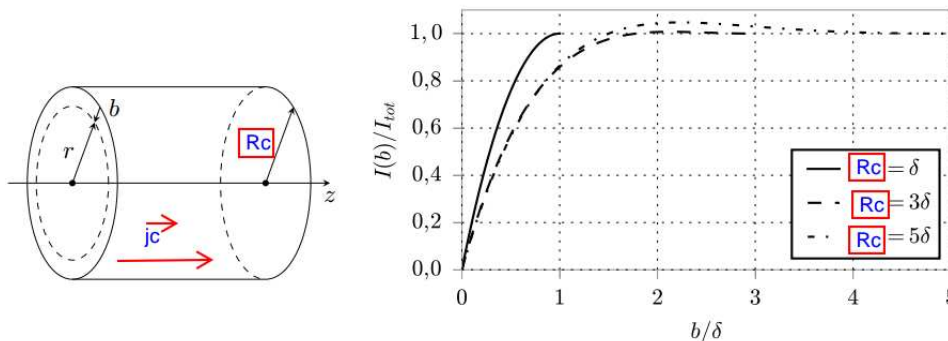
Déduire des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm que \vec{j}_c vérifie l'équation: $\Delta \vec{j}_c - \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = \vec{0}$

Quel nom porte le phénomène lié à une telle équation différentielle?

En déduire que cette équation peut se mettre sous la forme $\Delta \vec{j}_c = \left(\frac{1+j}{\delta}\right)^2 \vec{j}_c$. Exprimer δ en fonction de μ_0 , f et γ_0 . Calculer numériquement δ et préciser son unité. Données: $(1+j)^2 = 2j$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ et $f = 50 \text{ Hz}$.

8. La résolution de cette équation n'est pas demandée. On définit l'intensité $I(b)$ circulant dans l'épaisseur b la plus externe du câble par $I(b) = \left| \int_{R_c-b}^{R_c} 2\pi j_c(r) r dr \right|$ et I_{tot} l'intensité totale dans le conducteur par

$$I_{tot} = \left| \int_0^{R_c} 2\pi j_c(r) r dr \right|.$$



En étudiant les courbes représentatives de $I(b)/I_{tot}$ pour différents rayons de câble $R_c = \delta$, $R_c = 3\delta$ et $R_c = 5\delta$, quelle est la zone du câble la plus sollicitée pour transporter le courant? Est-il utile de fabriquer des câbles dont le rayon vaut plusieurs fois δ ? Justifier.

III. Pb III: Etude d'un câble coaxial

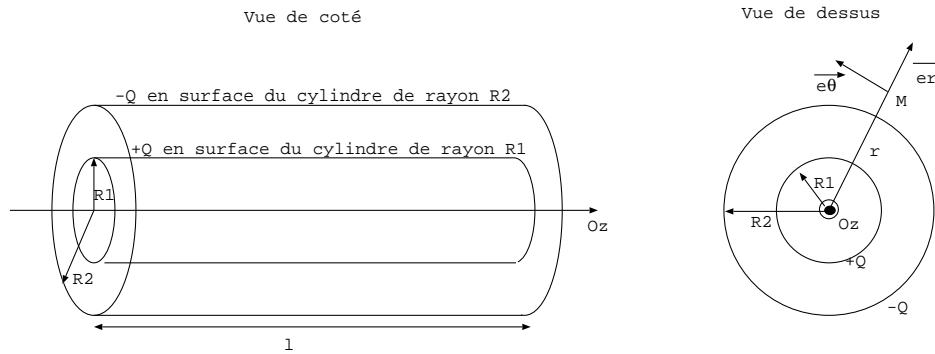
Les câbles coaxiaux sont utilisés comme moyen de transmission d'informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audio-numériques, ainsi que pour les interconnexions dans les réseaux informatiques. Ce sujet aborde la modélisation du câble coaxial.

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs de même longueur l , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

Données : $R_1 = 0,25 \text{ mm}$, $R_2 = 1,25 \text{ mm}$, $l = 100 \text{ m}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}^{-1}$ et $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H.m}^{-1}$.

Modélisation :

Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon R_1 , le conducteur (2) a un rayon R_2 . Ces deux conducteurs ont même longueur l . Vu que $l \gg R_2$, on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide. On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base de coordonnées cylindriques en M .



Capacité linéique Γ :

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et $-Q$. Elles sont uniformément réparties en surface.

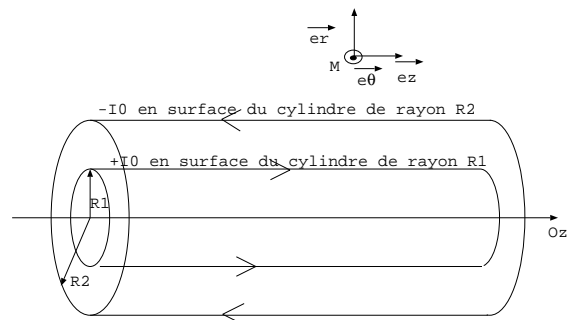
1. Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.
2. Par application du théorème de Gauss, exprimer $E(r)$ en fonction de Q , r , l et ϵ_0 pour $R_1 < r < R_2$.
3. Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs $V_1 = V(r = R_1)$ et $V_2 = V(r = R_2)$, constants. Exprimer $V_1 - V_2$ en fonction de Q , R_1 , R_2 , l et ϵ_0 .

4. Exprimer la capacité C de ce condensateur et en déduire que sa capacité linéique s'écrit $\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$.

Calculer numériquement Γ .

Inductance linéique Λ :

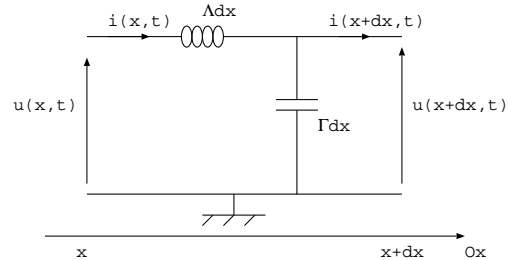
On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller $+I_0$, le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$. Les courants sont répartis sur la surface des conducteurs.



5. Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique $\vec{B}(M)$. Par des arguments d'invariance et de symétrie, justifier que $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$.

6. Par application du théorème d'Ampère sur un contour que l'on précisera, exprimer $B(r)$ en fonction de I_0 , r et μ_0 dans les trois domaines distincts $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$.
7. Exprimer l'énergie magnétique Em total du câble coaxial en fonction de I_0 , μ_0 , l , R_1 et R_2 .
8. En déduire l'inductance L du câble de longueur l et montrer que l'inductance linéique s'écrit $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. Calculer numériquement l'inductance linéique Λ du câble coaxial.
9. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ est homogène à une vitesse. Calculer numériquement cette vitesse. Que représente cette vitesse?

10. On modélise une longueur dx d'un câble coaxial par le schéma ci-contre comportant une bobine d'inductance Λdx et un condensateur de capacité Γdx où Λ et Γ sont respectivement les inductance et capacité linéiques du câble.



- 10.a. Déduire de la loi des noeuds, la relation $\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$.
- 10.b. Déduire de la loi des mailles, la relation entre $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial i}{\partial t}(x, t)$.
- 10.c. En déduire l'équation de propagation vérifiée par $u(x, t)$.

On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques (OPPH) de pulsation ω .

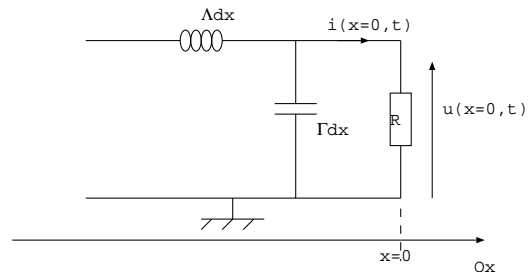
11. Déterminer la relation de dispersion des ondes dans ce milieu entre la pulsation et le nombre d'onde noté k . Donner la définition d'un milieu dispersif et d'un milieu absorbant. Le milieu est-il dispersif? Est-il absorbant? Les réponses devront être succinctement justifiées.

On cherche, en notation complexe, une solution sous la forme de la somme d'une OPPH incidente notée $\underline{u}_+(x, t)$ se propageant vers les x positifs et d'une onde réfléchie $\underline{u}_-(x, t)$ se propageant vers les x négatifs. On note respectivement \underline{U}_+ et \underline{U}_- les amplitudes de ces ondes. Chaque onde de tension est de plus associée à un courant $\underline{i}_+(x, t)$ et $\underline{i}_-(x, t)$, d'amplitudes \underline{I}_+ et \underline{I}_- .

On définit enfin l'impédance du milieu par $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$, elle dépend du type d'onde qui s'y propage.

12. Exprimer les OPPH incidentes et réfléchies en tension. En utilisant une des relations obtenues question 10a ou 10b, exprimer l'impédance du milieu pour les ondes incidentes, notée \underline{Z}_+ , et pour les ondes réfléchies \underline{Z}_- , en fonction de Λ et Γ . Quelle est l'unité des impédances \underline{Z}_+ et \underline{Z}_- ?

13. Le GBF émet une onde incidente qui se propage dans le câble (l'onde vient de $x \rightarrow -\infty$). Le câble est fermé par une résistance de charge notée R placée en $x = 0$. Cela génère une onde réfléchie. On note $\underline{u}(x, t) = \underline{u}_+(x, t) + \underline{u}_-(x, t)$ l'impédance du câble.

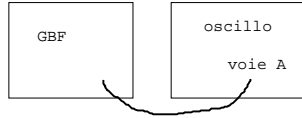


13.a. Déduire des questions précédentes l'expression de l'onde d'intensité $\underline{i}(x, t)$ en fonction de \underline{Z} , $\underline{u}_+(x, t)$ et $\underline{u}_-(x, t)$.

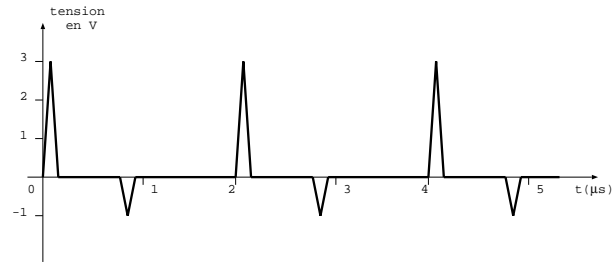
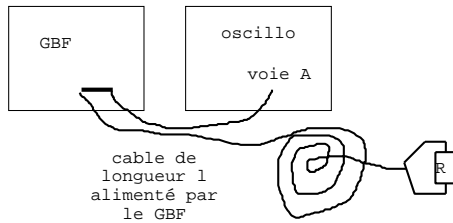
13.b. On définit le coefficient de réflexion \underline{r} par $\underline{r} = \frac{\underline{u}_-(x=0, t)}{\underline{u}_+(x=0, t)}$.

Donner la relation entre $\underline{i}(x=0, t)$, R et $\underline{u}(x=0, t)$, en déduire que $\underline{r} = \frac{R - \underline{Z}}{R + \underline{Z}}$.

13.c. On envoie sur le câble des impulsions triangulaires de fréquence f . On relie la sortie du GBF à la voie A de l'oscilloscope pour observer le signal. On donne ci-dessous le schéma du montage et la tension observée à l'oscilloscope.

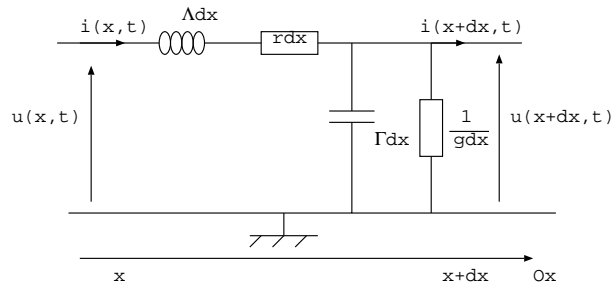


On alimente le câble en entrée par les impulsions délivrées par le GBF. La sortie du câble de longueur l , est reliée à une résistance R . On observe la tension à l'entrée du câble sur la voie A de l'oscilloscope. On donne ci-dessous le schéma du montage et la tension observée à l'oscilloscope.



Déduire des graphes, les valeurs numériques de: la fréquence des ondes, la vitesse des ondes dans le câble et l'impédance Z du câble. Donnée: longueur du câble $l = 100 \text{ m}$ et $R = 25 \Omega$.

En réalité, il y a des pertes d'énergie dues à la nature résistive des câbles. On ajoute une résistance $r dx$ en série avec l'inductance et une autre résistance linéique de valeur $\frac{1}{g dx}$ en parallèle avec la capacité (c'est-à-dire que $g dx$ est l'admittance de cette résistance).



14. Quelles sont les deux nouvelles équations différentielles couplées et du premier ordre en x et en t vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$?

15. On considère des solutions de la forme $\underline{u}(x,t) = \underline{U}(x)e^{j\omega t}$ et $\underline{i}(x,t) = \underline{I}(x)e^{j\omega t}$. Montrer que $\underline{U}(x)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{d^2 \underline{U}(x)}{dx^2} = \underline{Z}_s \underline{Y}_p \underline{U}(x)$

avec $\underline{Z}_s = r + j\Lambda\omega$ et $\underline{Y}_p = g + j\Gamma\omega$

On note $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$ tel que $\underline{k}^2 = \underline{Z}_s \underline{Y}_p$, $k'(\omega) > 0$ et $k''(\omega) > 0$. Les solutions de l'équation précédente conduisent à:

$$\underline{u}(x,t) = \underline{U}_1 e^{+k''(\omega)x + j(\omega t - k'(\omega)x)} + \underline{U}_2 e^{-k''(\omega)(x-l) + j(\omega t + k'(\omega)x)}$$

16. Sans chercher à déterminer les expressions de $k'(\omega)$ et de $k''(\omega)$, préciser si ce milieu est dispersif et/ou absorbant.

En choisissant judicieusement les composants et la géométrie de la ligne, il est possible de respecter la condition $\Lambda g = r\Gamma$. Dans ce cas, on trouve $k'(\omega) = \omega\sqrt{\Gamma\Lambda}$ et $k''(\omega) = -g\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$. On montre aussi que $|k''(\omega)|$ est minimal lorsque cette condition est respectée.

17. Quels sont les avantages à choisir les paramètres des câbles tels que $\Lambda g = r\Gamma$?

IV. Blue Fire (centrale TSI)

1. Le vecteur position s'écrit: $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$.

On en déduit les vecteurs vitesse et accélération en utilisant $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$.

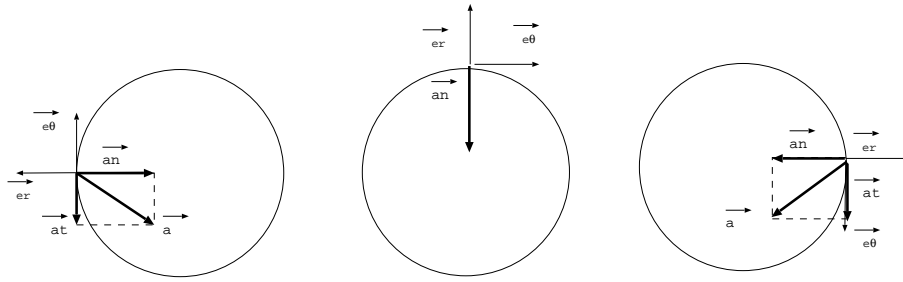
Soit $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ soit $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$

Et $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r$.

2. L'accélération se compose d'une accélération tangentielle et d'une accélération normale:

$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$ qui est telle que dans la montée, le mobile est freiné par son poids donc $\frac{dv}{dt} < 0$ et dans la descente, le mobile est accéléré par son poids donc $\frac{dv}{dt} > 0$. En $\theta = \pi$, la vitesse est minimale en norme donc l'accélération tangentielle est nulle.

$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$ est l'accélération normale qui est centripète et qui ne s'annule jamais.



3. Le mobile subit son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$ et la réaction normale $\vec{N} = -N\vec{e}_r$.

On écrit le PFD appliqué au mobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen soit $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$.

En projection sur \vec{e}_θ , on obtient: $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$. On en peut pas résoudre cette équation différentielle à la main car elle n'est pas linéaire à cause de $\sin\theta$ que l'on ne peut pas approximer à θ car on n'est pas aux petits angles.

4. instruction 1: 0 (valeur initiale de θ)

instruction 2: v_0/R (valeur initiale de $\dot{\theta}$)

instruction 3: 800 (sur la courbe le temps maximal est $t = 8$ s et d'après le code le pas de temps dt est 0,01 s, on a $t = Ndt$)

instruction 4: $-g/R*\text{np.sin}(\text{theta}[i])$ (en effet on a $\dot{\theta}(t + dt) = \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}dt$ soit d'après la ligne 13: $\ddot{\theta} = a$)

instruction 5: $\text{theta}[i] + \text{thetapoint}[i]*dt$ (en effet on a $\theta(t + dt) = \theta(t) + \dot{\theta}dt$)

5. On lit le temps $t = 5,2$ s pour un angle $\theta = 2\pi = 6,28$ rad.

partie B: L'arrivée du blue fire

6. Il y a stigmatisme approché dans les conditions de Gauss qui sont:

Les rayons frappent les dioptries au voisinage de l'axe optique

Les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe optique

7. On applique le relation de conjugaison avec $\overline{OA} = -D < 0$, $\overline{OA'} = d$ soit $\frac{1}{d} - \frac{1}{-D} = \frac{1}{f'}$ soit $d =$

$\frac{f'D}{D - f'}$ = 5,1 cm: l'objet est loin de la lentille donc l'image se forme dans le plan focal image de la lentille.

8. Sur la surface du capteur $l.L$ il y a 24 Mpixels, chacune de surface a^2 . On a donc $lL = 24.10^6 a^2$ soit

$$a = \sqrt{\frac{lL}{24.10^6}} = 6,0 \mu m.$$

9. L'objet train se déplace à la vitesse $v = 15$ m/s donc pendant la durée d'exposition, l'objet se déplace d'une distance vt_{exp} .

Un objet qui a pour taille vt_{exp} a pour taille $|\gamma|vt_{exp}$ sur le capteur avec $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{d}{-D} = 1,7 \cdot 10^{-2}$.

On peut estimer que si l'image sur le capteur se déplace de plus d'un pixel, l'image sera floue. Ce qui correspond à $|\gamma|vt_{exp} < a$ soit $t_{exp} < \frac{a}{v|\gamma|} = 24 \mu s$.

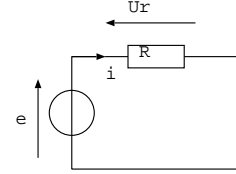
10. La spire est le siège du flux du champ magnétique créé par un aimant. Ce flux varie au cours du temps, donc il y a un courant induit qui apparaît dans la spire. Les côtés de la spire qui sont plongés dans le champ magnétique subissent la force de Laplace qui d'après la loi de Lenz s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance: ainsi la force de Laplace freine la spire donc freine le train.

11. On calcule le flux du champ magnétique dans la spire orientée par i soit par $\vec{n} = \vec{e}_y$ d'après la règle de la main droite. On a donc: $\phi = \iint B \vec{e}_y dS \vec{e}_y = Blx(t)$.

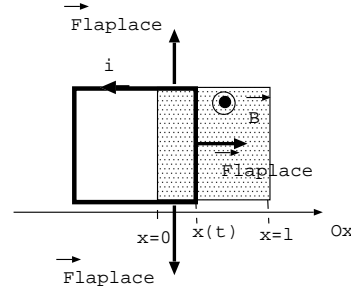
On déduit la fem dans la spire de la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt} = -Bl\dot{x} = -Blv$.

On représente le circuit électrique équivalent:

On applique la loi des mailles: $e = U_r = Ri$ soit $-Blv = Ri$: l'équation électrique contient le terme mécanique v . Il n'y a pas de bobine dans le circuit car on néglige l'auto-induction.



12. La force de l'aimant sur la spire est la résultante des forces de Laplace. La force de Laplace est nulle sur le côté (à l'arrière de la spire) qui n'est pas dans la zone de champ magnétique et les forces de Laplace sur les côtés parallèles à Ox se compensent.



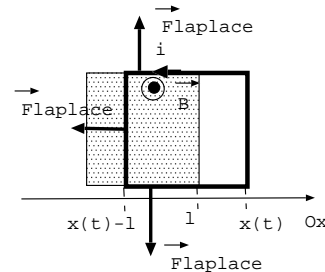
On a donc $\vec{F}_{aimant \rightarrow spire} = i(-l\vec{e}_z) \wedge B\vec{e}_y = +ilB\vec{e}_x = -\frac{B^2l^2}{R}v\vec{e}_x$ de la forme $-\alpha v\vec{e}_x$ avec $\alpha = \frac{B^2l^2}{R}$. Cette force est opposée à la vitesse, c'est bien une force de freinage.

On remarque que sur le schéma la force de Laplace est selon $+Ox$ car elle est orientée par i . En réalité la force est selon $-Ox$ car $i < 0$.

13. De la même façon que précédemment, la force de Laplace résultante est celle qui s'exerce sur le côté à l'arrière de la spire. Soit $\vec{F}_{aimant \rightarrow spire} = il\vec{e}_z \wedge B\vec{e}_y = -ilB\vec{e}_x$.

On calcule le flux magnétique: $\phi = Bl(l - (x(t) - l)) = Bl(2l - x(t))$ soit $e = -\frac{d\phi}{dt} = Bl\dot{x} = Blv = Ri$. Lors de cette phase, $i > 0$.

On a donc $\vec{F}_{aimant \rightarrow spire} = -\frac{B^2l^2}{R}v\vec{e}_x$: c'est la même force de freinage que lorsque le cadre entre dans



14. Ainsi à tout instant, le train subit les N forces qui s'exercent sur chacune des N spires soit $\vec{F} = -N\alpha v\vec{e}_x$. Le train subit aussi son poids et la réaction du support qui se compensent ici.

Le PFD appliqué au train dans le référentiel d'étude supposé galiléen s'écrit donc: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -N\alpha v\vec{e}_x$ soit

$$\frac{dv}{dt} + \frac{N\alpha}{m}v = 0.$$

On définit le temps $\tau = \frac{m}{N\alpha}$ et la solution de cette équation est $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$.

15. L'énergie cinétique est perdue sous forme de chaleur par effet Joule dans la résistance. Dans une résistance R , on a $E_{Joule} = \int_0^\infty Ri^2(t)dt$ avec $i = \pm \frac{Blv}{R}$ soit $i = \frac{B^2l^2v^2}{R^2}$.

Soit pour une résistance: $E_{Joule} = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^\infty = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{R} \frac{\tau}{2} = \frac{mv_0^2}{2N}$.

Ainsi dans les N résistances, l'énergie perdue par effet Joule est bien $NE_{Joule} = \frac{mv_0^2}{2}$: l'énergie cinétique initiale du train.

16. Le freinage par induction ne fonctionne que lorsque le mobile est en mouvement. Pour le maintenir à l'arrêt il faut un système de freinage mécanique.

V. Dimensionnement d'un câble électrique (E3A PC)

1. Equation de maxwell Gauss $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ (milieu électriquement neutre)

Equation de maxwell Thomson $\text{div} \vec{B} = 0$

Equation de Maxwell Faraday $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Equation de Maxwell-Ampère $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2. L'électron subit son poids, la force électrique $\vec{F}_e = -e\vec{E}$, la force magnétique $\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ et la force de frottements $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$.

Le rapport du poids et de la force électrique s'écrit: $\frac{m_e g}{eE} = \frac{10^{-10}}{E} \ll 1$ sachant que les champs électriques sont de l'ordre de 10^3 V.m^{-1} . On peut donc négliger le poids devant la force électrique.

La RFD appliquée à un électron s'écrit: $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}$.

3. On cherche un ordre de grandeur du rapport de la force magnétique sur la force électrique soit:

$\frac{F_m}{F_e} \approx \frac{evB}{eE} \approx \frac{v}{c} \ll 1$ car l'électron n'est pas relativiste donc sa vitesse v est négligeable devant la vitesse de la lumière (on a utilisé $E = Bc$, relation pour une OPPH dans le vide).

La RFD appliquée à l'électron s'écrit: $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}$.

4. En notation complexe $\frac{d}{dt} = j\omega$. La RFD devient:

$$j\omega m_e \vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v} \text{ soit } \vec{v} = \frac{-e\tau}{1 + j\omega\tau} \vec{E}.$$

On en déduit le vecteur densité de courant par $\vec{j}_c = n_0(-e)\vec{v} = \frac{n_0 e^2 \tau}{1 + j\omega\tau} \vec{E}$.

5. \vec{j}_c est de la forme $\vec{j}_c = \underline{\gamma} \vec{E}$ (loi d'Ohm locale). On a donc $\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2 \tau}{1 + j\omega\tau}$ soit par identification avec l'énoncé $\gamma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m_e}$.

6. AN: $\gamma_0 = 10^8 \text{ S.m}^{-1}$.

$\omega\tau = 2\pi f\tau \approx 3.10^{-12} \ll 1$, on peut donc négliger $\omega\tau$ devant 1 au dénominateur de $\underline{\gamma}$ soit $\underline{\gamma} = \underline{\gamma}_0$.

Le courant de déplacement est $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ soit en ordre de grandeur $\frac{\epsilon_0 E}{T} = \epsilon_0 f E$.

Le courant de conduction est $\vec{j}_c = \gamma_0 E$.

Ainsi le rapport du courant de déplacement sur le courant de conduction s'écrit $\frac{\epsilon_0 f E}{\gamma_0 E} = \frac{\epsilon_0 f}{\gamma_0} \approx 10^{-18} \ll 1$, on peut donc négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction, l'équation de Maxwell Ampère s'écrit $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c$.

7. $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$ avec $\vec{j}_c = \gamma_0 \vec{E}$

Soit en utilisant Maxwell Gauss et Maxwell Faraday:

$$\text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{B}) = -\Delta \vec{E}$$

Soit en utilisant la loi d'ohm et Maxwell-Ampère:

$$-\mu_0 \frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_0} \Delta \vec{j}_c$$

d'où $\Delta \vec{j}_c - \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = \vec{0}$: c'est une équation de diffusion.

En notation complexe, on a $\frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = j\omega \vec{j}_c$. On a donc $\Delta \vec{j}_c = j\omega \mu_0 \gamma_0 \vec{j}_c = \frac{(1+j)^2}{\mu_0 \omega \gamma_0} \vec{j}_c$.

Par identification avec l'énoncé on a $\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \gamma_0}} \approx 1 \text{ cm}$: c'est homogène à une distance. C'est la distance sur laquelle diffuse le courant.

8. Pour $b > \delta$, on a $I(b)/I_{tot} \approx 1$, ce qui signifie que la totalité du courant passe par la petite épaisseur b sur le bord du câble. Le rayon optimal du câble est $R_c \approx \delta$ pour que tout le volume du câble serve à transporter le courant.

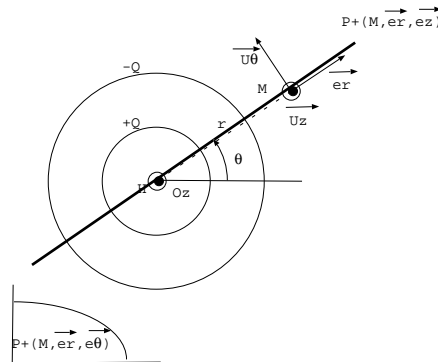
VI. Câble coaxial (début CCINP PSI et fin E3A PC)

Capacité linéique:

1. M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) mais le champ électrique ne dépend pas de θ car il y a invariance par rotation autour de Oz et ne dépend pas de z car il y a invariance par translation selon Oz (les cylindres sont infinis) donc $E(M) = E(r)$.

M appartient aux plans $P^+(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $P^+(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ donc le champ électrique en M est contenu dans ces deux plans et donc le champ électrique est selon \vec{e}_r .

On a donc $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

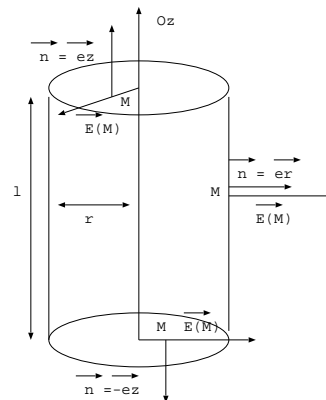


2. On choisit pour surface de Gauss un cylindre de longueur l , d'axe Oz et de rayon $r = HM$. On calcule le flux du champ électrique à travers ce cylindre.

$$\begin{aligned} \phi &= \iint E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_z + \iint E(r) \vec{e}_r \cdot dS (-\vec{e}_z) + \\ &\iint E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{U}_r = 0 + 0 + E(r) \iint dS_l = E(r) 2\pi r l \end{aligned}$$

(le flux est non nul uniquement sur la surface latérale du cylindre).

Pour $R_1 < r < R_2$, la charge intérieure est égale à $+Q$ soit par application du théorème de Gauss on a $\phi = E(r) 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_0}$ ou encore $\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r l \epsilon_0} \vec{e}_r$.



3. On a $V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = -\int_{r=R_2}^{r=R_1} \vec{E} \cdot d\vec{OM} = -\int_{r=R_2}^{r=R_1} E(r) dr = -\int_{r=R_2}^{r=R_1} \frac{Q}{2\pi r l \epsilon_0} dr = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

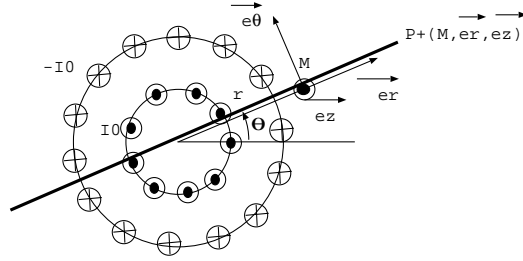
4. La capacité du câble est $C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi l \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$.

La capacité linéique (soit la capacité par unité de longueur est $\Gamma = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$. AN: $C = 3,5 \cdot 10^{-11} \text{ F.m}^{-1}$.

Inductance linéique:

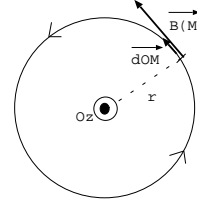
5. M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) mais le champ magnétique ne dépend pas de θ car il y a invariance par rotation autour de Oz et ne dépend pas de z car il y a invariance par translation selon Oz (les cylindres sont infinis) donc $B(M) = B(r)$.

M appartient au plan $P^+(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan donc le champ magnétique est selon \vec{e}_θ .



On a donc $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta$.

6. On choisit pour contour d'Ampère une ligne de champ soit un cercle centré sur Oz et de rayon $r = HM$. On oriente ce contour selon $+Oz$. On calcule la circulation du champ magnétique sur ce contour soit $\mathcal{C} = \int B(r)\vec{e}_\theta \cdot d\vec{OM} = \int B(r)r d\theta = B(r)r \int_0^{2\pi} d\theta = B(r)2\pi r$.



Pour $r < R_1$, il n'y a pas de courants enlacés donc $B(r) = 0$.

Pour $R_1 < r < R_2$, les courants enlacés sont donnés par I_0 , l'application du théorème d'Ampère conduit donc à $\mathcal{C} = B(r)2\pi r = \mu_0 I_0$ soit $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

Pour $r > R_2$, la somme des courants enlacés est $+I_0 - I_0 = 0$, elle est nulle donc $B(r) = 0$.

7. On calcule l'énergie magnétique dans l'espace entre R_1 et R_2 en calculant l'intégrale $E_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \iiint \frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2} dr r d\theta dz = \frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_0^l dz = \frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2} 2\pi l \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{\mu_0 l I_0^2}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ (le champ est nul en dehors de l'espace interconducteur donc il n'y a pas d'énergie magnétique pour $r < R_1$ et pour $r > R_2$).

8. L'énergie magnétique s'écrit aussi en fonction de l'inductance $E_m = \frac{L I_0^2}{2}$ soit par identification on a $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

On en déduit l'inductance par unité de longueur $L_l = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

9. On a $[L_l C_l] = F.m^{-1}.H.m^{-1}$ avec $i = C \frac{dU}{dt}$ on obtient l'unité équivalente d'une capacité soit $[C] = [i \frac{dt}{dU}] = A.s.V^{-1} = F$.

De même avec $U = L \frac{di}{dt}$, on obtient l'unité équivalente d'une inductance soit $[L] = [U \frac{dt}{di}] = V.s.A^{-1} = H$.

On a donc $[\frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}] = (\frac{1}{H.F.m^{-2}})^{1/2} = (\frac{1}{V.s.A^{-1}.A.s.V^{-1}.m^{-2}})^{1/2} = m.s^{-1}$: homogène à une vitesse.

Or l'application numérique donne $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{3,3 \cdot 10^{-7} \cdot 3,5 \cdot 10^{-11}}} = 3,10^8 \text{ m.s}^{-1}$: on reconnaît la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

10. 10.a. On écrit la loi des noeuds: $i(x, t) = i_c + i(x + dx, t)$ soit $i(x + dx, t) - i(x, t) = \frac{\partial i}{\partial x} dx = -i_c = -\Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}$ soit $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$.

10.b. On écrit la loi des mailles: $u(x, t) = u(x + dx, t) + u_L$ soit $u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} dx = -u_L = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$ soit $\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$.

10.c. On a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial i}{\partial x}) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t}(-\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}) = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

u vérifie donc l'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ avec pour vitesse des ondes $c = \sqrt{\frac{1}{\Lambda \Gamma}}$.

11. On choisit une solution sous la forme d'une OPPH $u(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$ (on peut prendre aussi une solution complexe de la forme $\underline{u} = u_0 e^{i(\omega t - kx)}$). On remplace dans l'équation de d'Alembert et on obtient la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$.

Un milieu est dispersif lorsque les ondes de fréquences différentes ne s'y propagent pas à la même vitesse.

Un milieu est dit absorbant lorsque l'amplitude de l'onde diminue lors de sa propagation.

Dans le milieu étudié, la vitesse de phase définie par $v_{phi} = \frac{\omega}{k} = c$: elle ne dépend pas de la pulsation de l'onde donc le milieu n'est pas dispersif.

Le vecteur d'onde k est réel donc l'onde se propage sans absorption.

12. On a $\underline{u}_+(x, t) = \underline{U}_+ e^{i(\omega t - kx)}$ pour l'onde incidente qui se propage selon $+Ox$ et $\underline{u}_-(x, t) = \underline{U}_- e^{i(\omega t + kx)}$ pour l'onde réfléchi qui se propage selon $-Ox$.

J'utilise la relation de la question 10 - a: $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$.

En notation complexe pour l'onde incidente: $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ et $\frac{\partial}{\partial x} = -ik$.

On a donc $-ik \underline{i}_+ = -\Gamma i \omega \underline{u}_+$ soit $\underline{Z}_+ = \frac{\underline{u}_+}{\underline{i}_+} = \frac{k}{\Gamma \omega} = \frac{1}{\Gamma c} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

Remarque: on trouve la même chose avec la question 10 - b: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$.

On a donc $-ik \underline{u}_+ = -\Lambda i \omega \underline{i}_+$ soit $\underline{Z}_+ = \frac{\underline{u}_+}{\underline{i}_+} = \frac{\Lambda \omega}{k} = \lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

En notation complexe pour l'onde réfléchi, on a: $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ et $\frac{\partial}{\partial x} = +ik$. On en déduit de la même façon

que $\underline{Z}_- = -\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

Les impédances sont en Ω .

13. 13.a. D'après la définition de Z et les résultats de la question précédente, on a $\underline{Z}_+ = +Z$ et $\underline{Z}_- = -Z$.

L'onde incidente en courant est de la forme $\underline{i}_+ = \frac{\underline{u}_+}{Z}$ et l'onde réfléchi $\underline{i}_- = \frac{\underline{u}_-}{Z}$.

L'onde de courant s'écrit donc $\underline{i} = \frac{\underline{u}_+}{Z} - \frac{\underline{u}_-}{Z}$.

13.b. En $x = 0$, on a $\underline{u}(x = 0, t) = R \underline{i}(x = 0, t)$ soit $\underline{u}_+(x = 0, t) + \underline{u}_-(x = 0, t) = R(\frac{\underline{u}_+(x = 0, t)}{Z} - \frac{\underline{u}_-(x = 0, t)}{Z})$ qui donne $\underline{u}_+(x = 0, t)(1 - \frac{R}{Z}) = -\underline{u}_-(x = 0, t)(1 + \frac{R}{Z})$ soit $\underline{r} = \frac{\underline{u}_-(x = 0, t)}{\underline{u}_+(x = 0, t)} = \frac{\frac{R}{Z} - 1}{\frac{R}{Z} + 1} = \frac{R - Z}{R + Z}$.

13.c. L'onde incidente a pour période $T = 2 \mu s$, on en déduit sa période $f = \frac{1}{T} = 500 \text{ kHz}$.

L'onde incidente a pour amplitude 3 V et l'onde réfléchi pour amplitude 1 V , l'onde réfléchi a une tension de signe opposé à celle de l'onde incidente donc $r = -\frac{1}{3}$. Or on a $r = \frac{R - Z}{R + Z}$, soit $r(R + Z) = R - Z$ qui

donne $Z = \frac{1 - r}{1 + r} R = 25 \Omega$.

L'onde réfléchi est en retard par rapport à l'onde incidente, on lit $\Delta t = 0,8 \mu s$, elle est détectée au niveau de l'oscilloscope après avoir parcouru la distance $2l$ (un aller-retour sur le câble) le temps de décalage entre l'onde incidente et l'onde retour est donc $\Delta t = \frac{2l}{c}$ soit $c = \frac{2l}{\Delta t} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

14. La loi des noeuds s'écrit: $i(x, t) = i(x + dx, t) + gdxu(x + dx, t) + \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx, t)$ avec $i(x + dx, t) - i(x, t) = \frac{\partial i}{\partial x}(x, t)dx$ et en ne gardant que les termes d'ordre 1 en dx : $gdxu(x + dx, t) \approx gdxu(x, t)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x + dx, t) \approx \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$.

On a donc $\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -gu(x, t) - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$.

La loi des mailles s'écrit: $u(x, t) = u(x + dx, t) + \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) + rdx i(x, t)$ avec $u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} dx$ soit $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) - ri(x, t)$.

15. On remplace les solutions proposées dans les deux équations différentielles et en simplifiant par $e^{j\omega t}$:

$$\underline{I}'(x) = -g\underline{U}(x) - \Gamma j\omega \underline{U}(x)$$

$$\underline{U}'(x) = -r\underline{I}(x) - \Lambda j\omega \underline{I}(x)$$

On dérive la seconde équation par rapport à x :

$$\underline{U}''(x) = -(r + \Lambda j\omega) \underline{I}'(x)$$

On remplace $\underline{I}'(x)$ par $\underline{I}'(x) = -(g + \Gamma j\omega) \underline{U}(x)$ et on obtient:

$$\underline{U}''(x) = (r + \Lambda j\omega)(g + \Gamma j\omega) \underline{U}(x): \text{ c'est bien l'équation demandée dans l'énoncé.}$$

16. Le vecteur d'onde \underline{k} possède une partie réelle k' donc il y a propagation et une partie imaginaire k'' donc il y a absorption.

Pour savoir si le milieu est dispersion, il faut calculer la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k'(\omega)}$. Si cette vitesse dépend de ω , il y a dispersion, si elle n'en dépend pas, il n'y a pas dispersion. On ne peut donc pas conclure sur la dispersion si on ne connaît pas l'expression de $k'(\omega)$.

17. On obtient une vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$ constante: donc avec un tel choix il n'y a pas dispersion, les paquets d'onde ne se déforment pas, ils gardent la même taille au cours de la propagation.

On note que les tensions sont proportionnels à $e^{+k''(\omega)x}$ avec $k'' < 0$ que l'on peut noter sous la forme $e^{-x/\delta}$ où $\delta = \frac{1}{k''}$ représente la distance qui caractérise l'atténuation de l'onde. A savoir que pour une distance de l'ordre de 5δ , l'onde est totalement absorbée. Ainsi plus k' est petit et plus δ est grand donc plus l'onde se propage loin: l'atténuation est moins forte.