Chapitre EM 10 : absorption-dispersion

Lorsque l'on néglige les phénomènes dissipatifs (force de viscosité dans les fluides, frottements sur une corde,...), l'équation de propagation est de type d'Alembert de la forme: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

La relation de dispersion s'écrit alors: $k = \frac{\omega}{c}$

Cette relation de dispersion traduit que les ondes se propagent à la même vitesse c quelle que soit leur fréquence. On dit qu'il n'y a pas dispersion.

Ce chapitre aborde le cas des ondes mécaniques en présence de phénomènes dissipatifs ou d'ondes électromagnétiques se propageant dans un milieu matériel tel que l'onde interagit avec les particules chargées de ce milieu. Dans ces exemples, l'onde peut subir:

- de l'absorption : le milieu absorbe l'énergie de l'onde au cours de sa propagation, l'amplitude de l'onde diminue
- de la dispersion : les ondes de fréquences différentes ne se propagent pas à la même vitesse, elles peuvent ne pas suivre le même chemin

I. Rappels d'électromagnétisme

Les équations de Maxwell dans la matière (en présence courants et de charges)

Maxwell Gauss : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon$

Maxwell Faraday : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell Ampère : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Maxwell flux : $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

L'équation de conservation de la charge: $\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Au sujet du vecteur densité de courant: un courant est un mouvement d'ensemble de particules chargées. On note q la charge de la particule de vitesse $\vec{v}$ et n^* la densité volumique (ou nombre de particules par unité de volume) de ces particules. Le vecteur densité de courant s'écrit $\boxed{\vec{j} = n^* q \vec{v}.}$ Dans cette expression, on trouve la vitesse d'une particule chargée en lui appliquant la RFD.

Unités: $[j] = [\frac{I}{S}] = A.m^{-2}$ $[n^*] = \text{particules}.\,m^{-3}$ $[v] = m s^{-1}$

$[q] = C$

Le courant est créé par un champ électrique lié à une ddp. Dans un métal, la loi d'Ohm donne la relation entre le courant et le champ électrique appliqué:

$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$ γ conductivité en $\Omega^{-1}.m^{-1}$ ou $S\,m^{-1}$

On rappelle l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électrique aux charges pour les mettre en mouvement: $\boxed{\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E}}$

la force magnétique ne travaille pas donc le champ $\vec{B}$ ne donne pas d'énergie aux charges

Force de Lorentz:

$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}}$

II. Absorption

L'absorption se manifeste lorsque l'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert et qu'elle présente des dérivées partielles d'ordre impair qui traduisent la présence de phénomènes ....
Dans ce cas la relation de dispersion donne un vecteur d'onde qui est un nombre complexe.

Sens physique d'un vecteur d'onde complexe:

Pour comprendre le sens physique d'un vecteur d'onde complexe prenons l'exemple d'un champ électrique de la forme $\underline{\vec{E}} = \vec{E_0} e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ avec $\underline{k} = k' - ik''$ où k' et k'' sont des réels positifs.

à savoir faire

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E_0} e^{i(\omega t - k'x + ik''x)} = \vec{E_0} e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}$$

$$\vec{E} = Re\left(\underline{\vec{E}}(x,t)\right) = \underbrace{\vec{E_0} e^{-k''x}} \cos(\underbrace{\omega t - k'x})$$

amplitude de l'onde qui ↓ quand x ↗ soit quand l'onde se propage : l'absorption est liée à la partie imaginaire de $\underline{k}$

phase d'une onde qui se propage selon (+Ox) : la phase est liée à la partie réelle de $\underline{k}$

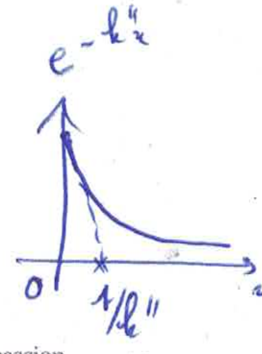
Conclusion:

La partie réelle de k traduit la propagation et intervient dans la phase

La vitesse de phase d'une OPPH de pulsation ω s'écrit donc $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{Re(\underline{k})}}$

La partie imaginaire traduit l'absorption et intervient dans l'amplitude

La distance caractéristique de pénétration de l'onde dans un milieu est $\frac{1}{|Im(\underline{k})|}$



Remarque très importante : l'équation de propagation conduit à une relation de dispersion donnant l'expression de $\underline{k}^2$ (qui vient du terme ...$\partial^2/\partial x^2$...............). La forme la plus générale de $\underline{k}^2$ est telle que $\underline{k}^2$ contient une partie réelle et une partie imaginaire

Cas 1: $\underline{k}^2 = K > 0$ $\quad \underline{k} = \sqrt{K}$

$Re(\underline{k}) = \sqrt{K} \neq 0$: il y a de la propagation

$Im(\underline{k}) = 0$: il n'y a pas d'absorption

Cas 2: $\underline{k}^2 = -K < 0$ $\quad \underline{k} = \pm i\sqrt{K}$

$Re(\underline{k}) = 0$: il n'y a pas de propagation $\Rightarrow$ c'est une O.S.

$Im(\underline{k}) = \pm\sqrt{K}$: il y a de l'absorption

Une O.S. amortie s'appelle une onde évanescente

B très important

Cas 3: $\underline{k}^2 = -i K$ avec $K>0$ $\quad \underline{k}^2 = e^{-i\pi/2} K$

et $\underline{k} = \left(e^{-i\pi/2} K\right)^{1/2} = e^{-i\pi/4}\sqrt{K} = \left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{K} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{K}$

soit $\underline{k} = \sqrt{\frac{K}{2}} - i\sqrt{\frac{K}{2}}$ $\quad Re(\underline{k}) = \sqrt{\frac{K}{2}} \neq 0$: il y a de la propagation

$Im(\underline{k}) = \sqrt{\frac{K}{2}} \neq 0$: " " de l'absorption

$\underline{k} = K_1 + i K_2$

Cas 4: K_1 et K_2 ne sont pas nuls. Le calcul de l'expression de $\underline{k}$ est alors compliqué. En général, l'énoncé demande de comparer les valeurs numériques de $|K_1|$ et de $|K_2|$ et de ne garder qu'un seul terme: le plus grand. On se ramène alors à une des trois situations évoquées ci-dessus.

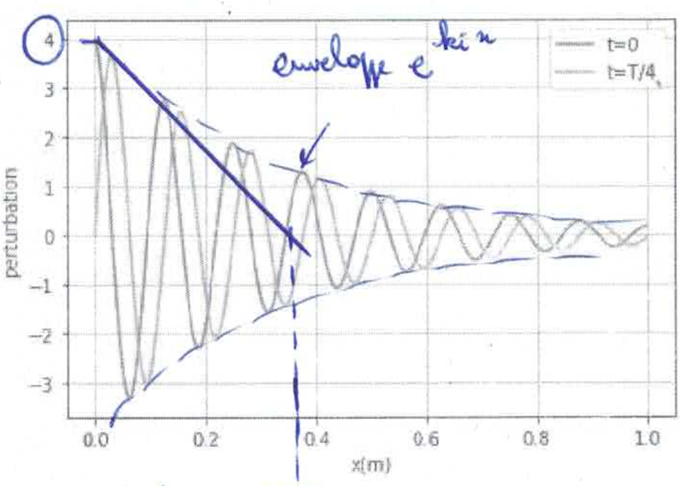
Visualisation du phénomène d'absorption: exemple 1:

```
w=5 # désigne la pulsation
kr,ki=50,-3 # désignent les parties réelle et imaginaire de k
def y(x,t):
return 4.*np.exp(ki*x)*np.cos(w*t-kr*x)
T=2*np.pi/w# la période de l'onde
vphi=w/kr # désigne la vitesse de phase
ld=2*np.pi/kr # désigne la longueur d'onde
x=np.linspace(0,1,1000)
plt.plot(x,y(x,0),label='t=0')
plt.plot(x,y(x,T/4),label='t=T/4')
plt.xlabel('x(m)')
plt.ylabel('perturbation')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

kr intervient dans la phase
ki < 0 intervient dans l'exponentielle (amplitude ↓)

Commenter les courbes obtenues et compléter le code.

amplitude maximale



$\frac{1}{|Im(\underline{k})|} = 0{,}35$ m

On voit que l'onde s'est propagée donc $k_r \neq 0$ et $k_r = \frac{2\pi}{\lambda}$

avec $8\lambda = 1$ m soit $\lambda = \frac{1}{8} = 0{,}125$ m

d'où $k_r = \frac{2\pi}{0{,}125} = 50\ m^{-1}$

De même $\frac{1}{|k_i|} = 0{,}35$ m

soit $k_i = \frac{-1}{0{,}35} \simeq -3$

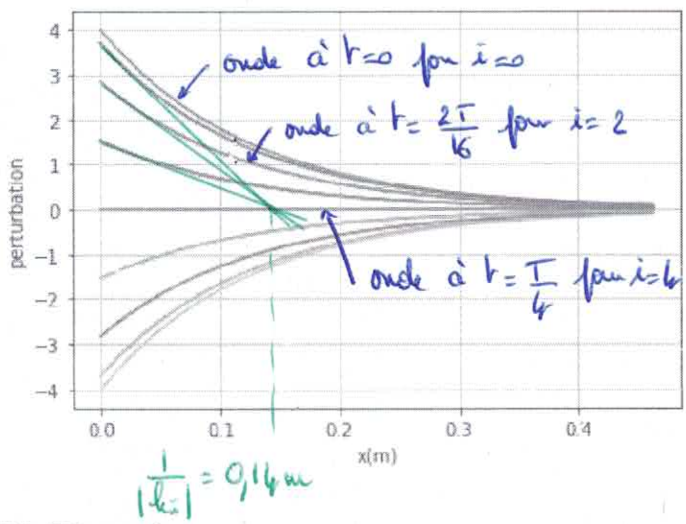
Rq: l'onde a avancé de : 2mm ⟺ ? $\quad$ de $\frac{2\times 0{,}2}{14{,}5} = 0{,}03$ m $\quad T = \frac{2\pi}{5} = 1{,}25$ s

14,5mm ⟺ 0,2 m

soit $v_\varphi = \frac{0{,}03}{1{,}25/4} = 0{,}1\ m s^{-1}$ $\quad$ d'où $k_r = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{5}{0{,}1} = 50\ m^{-1}$ (c'est cohérent)

Visualisation du phénomène d'absorption: exemple 2:

```
w=5
kr,ki=.0.,.-7
def y(x,t):
return 4*np.cos(w*t-kr*x)*np.exp(+ki*x)
T=2*np.pi/w
x=np.linspace(0.,0.5,1000)
for i in range(0,16):
plt.plot(x,y(x,i*T/8 ))
plt.xlabel('x(m)')
plt.ylabel('perturbation')
plt.grid()
plt.show()
```



l'onde ne se propage pas, elle est stationnaire : $k_r = 0$.

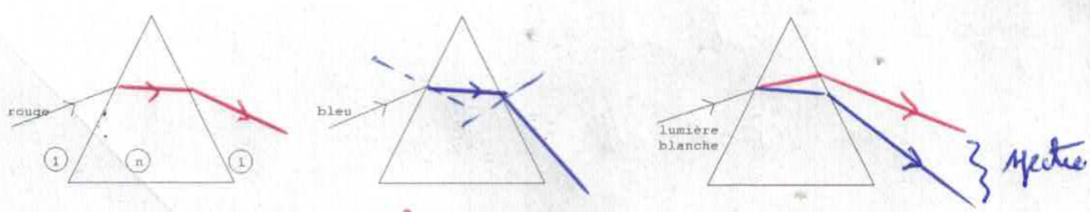
l'onde est amortie : on mesure $\frac{1}{|k_i|} = 0{,}14$ m soit $k_i \simeq -7\ m^{-1}$

III. Dispersion

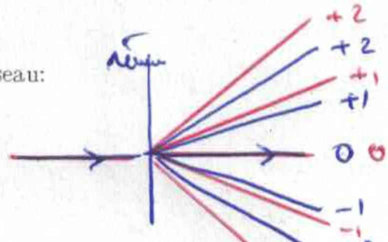
1. *Définition et exemples:*

Un milieu ou un système est dit dispersif si les ondes de fréquences différentes n'ont pas la même vitesse.

Exemple 1: le verre est un milieu dispersif (l'indice du verre dépend de la longueur d'onde, on donne la loi de Cauchy : $n = n_1 + \frac{n_2}{\lambda^2}$).



Exemple 2: le réseau:



l'onde 0 n'est pas dispersif
les ondes non nuls sont dispersifs

L'effet d'un milieu dispersif ne peut s'observer que si l'on fait propager dans ce milieu des ondes de différentes fréquences.

2. *Notion de paquet d'ondes*

Une OPPH n'a pas de réalité physique, les sources émettent des trains d'onde, soit des ondes limitées dans le temps et dans l'espace. Un train d'onde (ou paquet d'onde) peut se modéliser par la superposition de plusieurs OPPH de fréquences différentes.

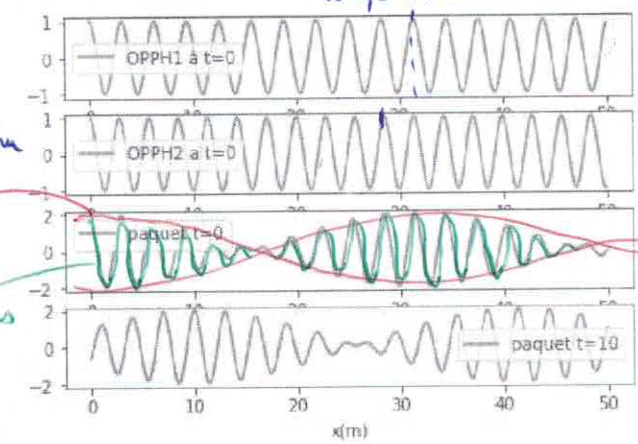
Exemple 1 : le paquet d'ondes le plus simple est composé de la superposition de deux OPPH de fréquences différentes:

$10\lambda_1 \simeq 31\,m$

$10\lambda_2 \simeq 28\,m$

enveloppe

oscillations



OPPH1 : $y_1(x,t) = 1 \times \cos\left(\omega_1 t - \frac{\omega_1 x}{c}\right)$

OPPH2 : $y_2(x,t) = 1 \times \cos\left(\omega_2 t - \frac{\omega_2 x}{c}\right)$

OPPH1 + OPPH2 à $t=0$

le paquet d'onde est composé d'une enveloppe et d'oscillations à l'intérieur de l'enveloppe

Exemple 2:

```
c=1
def paquet(fmin,fmax,x,t):
---s=0
---N=500
---for i in range(N):
--------f0=(fmax+fmin)/2
--------Df=(fmax-fmin)
--------f=fmin+i*Df/N
--------w=2*np.pi*f
--------k=w/c
--------g=np.exp(-(f-f0)**2)
--------s=s+g*np.cos(w*t-k*x)
---return s
def spectre(fmin,fmax):
---N=500
---for i in range(N):
--------f0=(fmax+fmin)/2
--------Df=(fmax-fmin)
--------f=fmin+i*Df/N
--------g=np.exp(-(f-f0)**2)
--------plt.plot([f,f],[0,g])
--------plt.xlabel('f(Hz)')
---return plt.show()
```

on initialise la somme

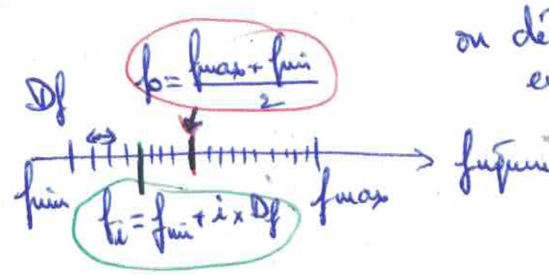
l'amplitude de l'onde dépend de sa fréquence

on fait la somme : $s = \sum_{i=0}^{N} e^{-(f_i - f)^2} \times \cos(\omega_i t - k_i x)$

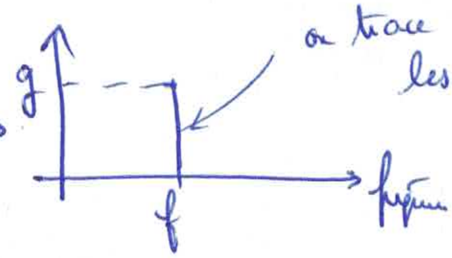
avec $f_i = f_{min} + i\,\frac{f_{max} - f_{min}}{N}$

$\omega_i = 2\pi f_i$ et $k_i = \frac{\omega_i}{c}$

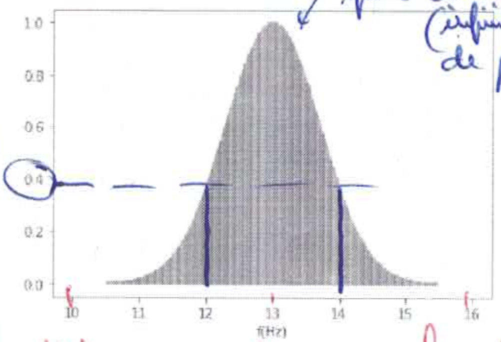
on découpe l'intervalle [fmin, fmax] en N "tronçons"

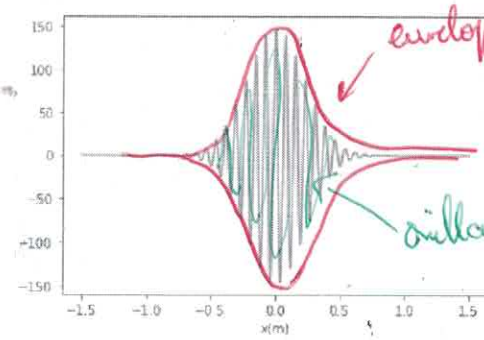


on trace un segment qui relie les points $(f,0)$ et (f,g)



On visualise le paquet d'ondes et le spectre pour :





3. *Vitesse de phase et vitesse de groupe*

Un paquet d'ondes est composé d'une enveloppe et d'oscillations à l'intérieur de cette enveloppe.

On définit deux vitesses pour la propagation de ce paquet d'onde:

- La vitesse de phase : c'est la vitesse de propagation d'une OPPH de pulsation ω. On l'appelle vitesse de phase, car c'est la phase qui traduit la propagation d'une onde et cette propagation est contenue dans la partie réelle du vecteur d'onde.

La vitesse de phase est donc définie par $\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{\mathcal{R}e(\underline{k})}}$.

Remarque 1 :une OPPH n'a pas de réalité physique car les ondes monochromatiques (une seule fréquence) n'existent pas. Donc la vitesse de phase n'est pas une vitesse matérielle, elle peut donc être supérieure à c.

Remarque 2 : pour une OPPH on a $\boxed{\lambda = v_\phi T}$.

- La vitesse de groupe : elle correspond à la vitesse de propagation de l'énergie soit à la vitesse de propagation de l'enveloppe du signal ou encore vitesse de propagation de l'information, c'est elle qui a une réalité matérielle et physique. Elle est donc inférieure à c.

On la calcule en appliquant $\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk'} \text{ où } k' = \mathcal{R}e(\underline{k})}$.

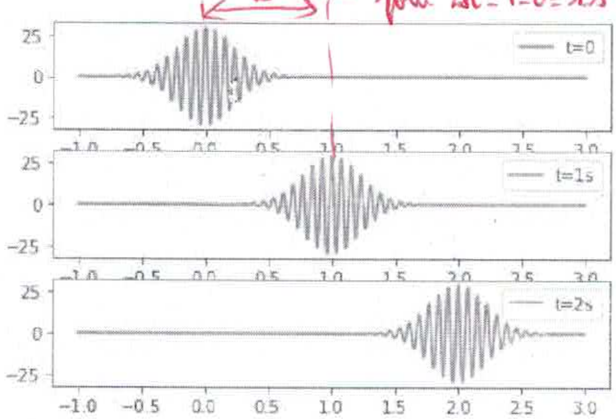
Dans un milieu dispersif, v_ϕ et v_g sont différentes et ces vitesses dépendent de ω.

Dans un milieu non dispersif, v_ϕ et v_g sont égales et ces vitesses ne dépendent pas de ω.

4. *Propagation d'un paquet d'ondes*

Exemple de propagation dans un milieu non dispersif: le paquet d'onde gaussien avec $f_{min} = 10\ Hz$ et $f_{max} = 16\ Hz$ se propage dans un milieu où la relation de dispersion est $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$.

$\Delta x = 1$ m pour $\Delta t = 1 - 0 = 1$ s

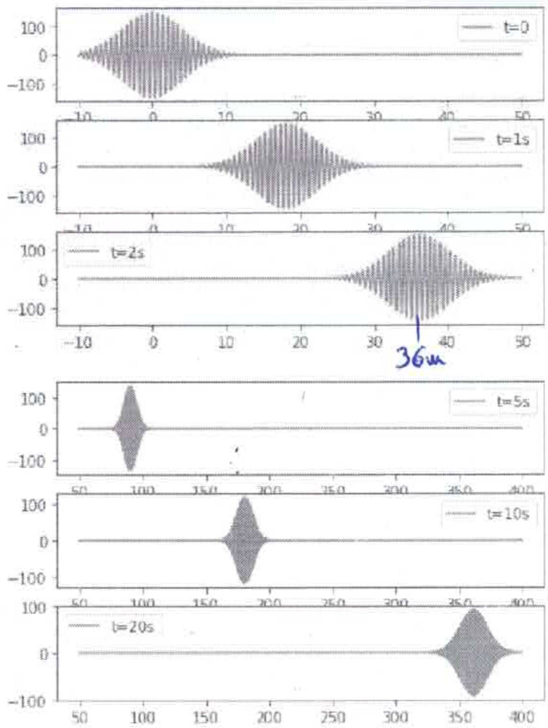


cette relation traduit que $v_\varphi = v_g = c$: il n'y a pas dispersion.

Toutes les ondes de fréquences différentes qui composent le paquet d'onde vont à la même vitesse c donc le paquet d'onde ne se déforme pas en se propageant

le paquet se propage à la vitesse $c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{1} = 1\ ms^{-1}$

Exemple de propagation dans un milieu dispersif: relation de dispersion de la forme $k = \sqrt{\omega}$



le paquet d'onde se propage :

- sur de petites échelles de temps on n'observe pas de déformations
- sur de grandes échelles de temps, il s'étale (comme un groupe de coureurs qui courent à des vitesses ≠)

le paquet d'onde avance de $\Delta x = 36\,m$ en $\Delta t = 2 - 0 = 2\,s$ d'où sa vitesse

$$v = \frac{36}{2} = 18\ ms^{-1}$$

(voir plus bas : c'est sa vitesse de groupe)

$k = \sqrt{\omega}$

$Re(k) \neq 0$: il y a de la propagation

$Im(k) = 0$: il n'y a pas d'absorption

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega}} = \sqrt{\omega}$$

$v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ avec $k = \sqrt{\omega}$ donne $\ln k = \frac{1}{2} \ln \omega$

on différencie : $\dfrac{dk}{k} = \dfrac{1}{2} \dfrac{d\omega}{\omega}$

d'où $v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{2\omega}{k} = \dfrac{2\omega}{\sqrt{\omega}} = 2\sqrt{\omega}$

le paquet d'onde a une fréquence moyenne $f_0 = \dfrac{f_{min} + f_{max}}{2} = \dfrac{10 + 16}{2} = 13\ Hz$

$v_\varphi = \sqrt{2\pi f_0} \simeq 9\ ms^{-1}$: c'est la vitesse des oscillations dans l'enveloppe

$v_g = 2\sqrt{2\pi f_0} = 18\ ms^{-1}$: " de l'enveloppe du paquet d'onde

Conclusion : dans un milieu non dispersif, le paquet d'onde se propage sans déformation

dans un milieu dispersif, le paquet d'onde s'étale