

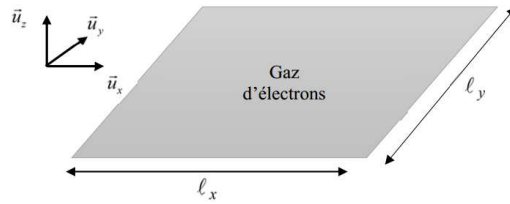
D.S. N°6 DE PHYSIQUE

En 1980, Klaus Von Klitzing découvrit, dans le cas de semi-conducteurs à très basse température plongés dans un champ magnétique intense, que la résistance Hall R_H était quantifiée: ce résultat est alors qualifié d'effet Hall quantique.

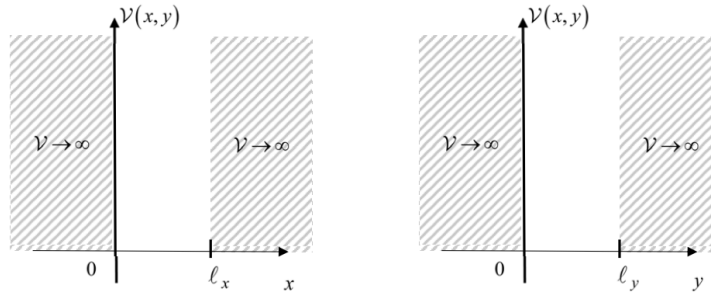
L'explication de ces comportements fait appel à la mécanique quantique: les niveaux d'énergie d'un gaz bidimensionnel d'électrons dans un champ magnétique perpendiculaire, appelés niveaux de Landau, sont discrets et régulièrement espacés.

Modélisation sans champ magnétique

On considère pour cela les électrons mobiles précédents comme un gaz de particules quantiques libres n'interagissant pas entre-elles et confinées dans une structure cristalline particulière qui ne leur permet de se déplacer que sur une distance l_x selon \vec{u}_x et l_y selon \vec{u}_y .



On assimile cette situation à celle d'un puits de potentiel infini rectangulaire de longueur l_x et de largeur l_y pour lequel l'énergie potentielle $V(x, y)$ s'écrit: $V(x, y) = 0$ à l'intérieur du puits et $V(x, y) \rightarrow \infty$ en dehors du puits



On suppose les directions x et y indépendantes de sorte à pouvoir traiter le problème à une seule dimension suivant x dans un premier temps.

1. Rappeler l'inégalité de Heisenberg reliant l'indétermination quantique sur la position x et sur la quantité de mouvement p_x . En déduire l'expression de l'incertitude sur l'énergie de la particule dans le puits en fonction de \hbar , l_x et m (la masse de l'électron).

On note $\underline{\psi}_{1D}(x, t) = \underline{\phi}(x)e^{-iE_x t/\hbar}$ la fonction d'onde associée à l'énergie E_x de l'électron confiné dans un puits infini à une dimension de largeur l_x , avec $\underline{\phi}(x)$ une fonction a priori complexe ne dépendant que de x et i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

2. Que représente $|\underline{\psi}_{1D}(x, t)|^2$? Justifier le caractère stationnaire des états de l'électron.

3. Écrire la condition de normalisation portant sur l'axe Ox. Quelles sont les conditions aux limites à imposer à la fonction $\underline{\phi}(x)$?

4. Donner un exemple ayant des conditions aux limites similaires dans un autre domaine de la physique.

On rappelle qu'une fonction d'onde $\underline{\psi}$ associée à une énergie E des états stationnaires d'une particule quantique est solution de l'équation de Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\underline{\psi} + V\underline{\psi} = i\hbar\frac{\partial\underline{\psi}}{\partial t}$ où $\Delta\underline{\psi}$ désigne le Laplacien de la fonction d'onde.

5. Montrer que l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\underline{\phi}(x)$ à l'intérieur du puits peut s'écrire: $\ddot{\underline{\phi}} + k_x^2\underline{\phi} = 0$ où l'on donnera l'expression de k_x en fonction de E_x , m et \hbar .

6. En déduire $\underline{\phi}(x)$ et déduire des conditions aux limites que k_x est quantifiée et donc que l'énergie E_x est

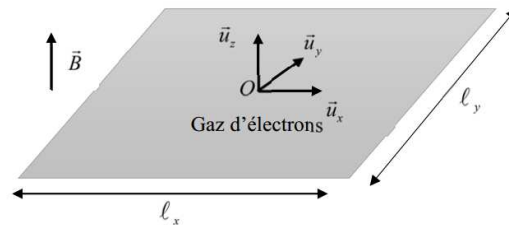
quantifiée et s'écrit: $E_x = \frac{n_x^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml_x}$ avec n_x un entier positif non nul.

Commenter par rapport au résultat de l'inégalité de Heisenberg.

7. On souhaite dans un second temps prendre en compte le confinement dans la direction y pour lequel on suppose par analogie que l'énergie est aussi quantifiée. Exprimer par analogie la pulsation spatiale k_y en fonction de n_y et l_y .

Modélisation en présence d'un champ magnétique

En présence d'un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$, il convient de modifier l'équation de Schrödinger.



On choisit l'origine du repère $(Oxyz)$ au centre du gaz d'électrons. Soit $\psi_{2D}(x, y, t) = \underline{\phi}(x, y)e^{-iEt/\hbar}$ la fonction d'onde associée à l'énergie E des états stationnaires d'un électron confiné et plongé dans un champ magnétique.

Une modélisation consiste à écrire $\underline{\phi}(x, y)$ sous la forme $\underline{\phi}(x, y) = \Omega(x)e^{ik_y y}$. On admet que l'équation de Schrödinger conduit à: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Omega(x)}{dx^2} + V_{eff}(x)\Omega(x) = E\Omega(x)$ où $V_{eff}(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2(x - x_0)^2$ l'énergie potentielle effective avec $\omega_0 = \frac{eB}{m}$ et $x_0 = \frac{\hbar k_y}{eB}$.

8. Quel système présente une énergie potentielle similaire dans un autre domaine de la physique ? Représenter $V_{eff}(x)$.

9. La modélisation impose au centre x_0 de l'énergie potentielle effective d'être situé à l'intérieur du gaz d'électrons. Quelle est alors la valeur maximale possible pour k_y ?

10. En supposant que la quantification du module d'onde k_y reste identique à celle du puits infini unidimensionnel de la question 7, montrer que l'entier n_y doit satisfaire à l'inégalité: $n_y \leq \frac{2eB}{h} l_x l_y$.

11. En tenant compte du spin de l'électron, c'est-à-dire qu'il existe deux états possibles sur un même niveau d'énergie, en déduire g le nombre maximum d'états d'un électron d'énergie E .

Le système considéré est toujours le gaz d'électrons contenant N_e électrons dans une forme parallélépipédique de hauteur b de longueur l_x et de largeur l_y . Ce système est en équilibre à la température T .

12. Exprimer N_e à l'aide de la densité volumique n_v d'électrons supposée uniforme et des caractéristiques géométriques du système considéré.

13. Lorsque la température T est faible, on admettra que seul le niveau fondamental d'énergie est occupé. Proposer une inégalité entre N_e et g pour satisfaire à une telle condition et montrer qu'elle n'est réalisable que pour un champ magnétique tel que : $B \geq B_{min}$ où l'on donnera l'expression de B_{min} en fonction de n_v , h , e et b .