

Révisions forces centrales

I. Champ de force centrale

Les forces centrales sont de la forme $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$.

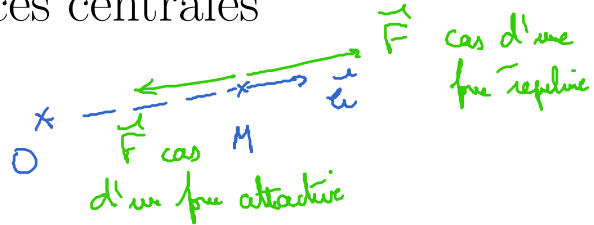
forces conservatives : $F = -d\epsilon_p/dr$

1. Conservation du moment cinétique

On applique le théorème du moment cinétique au point M dans R galiléen par rapport à O :

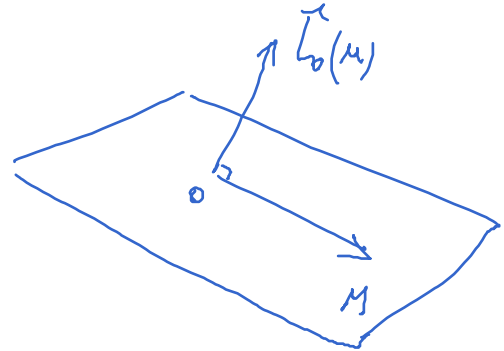
$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} \stackrel{!}{=} \vec{0} \quad \text{car } \vec{OM} \text{ et } \vec{F} \text{ sont colinéaires}$$

donc le moment cinétique est constant



Conséquence 1: le mouvement est plan

Par définition : $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R)$ est un vecteur $\perp$ à $\vec{OM}$ donc à tout moment $\vec{OM}$ est perpendiculaire au vecteur constant $\vec{L}_O(M)$ donc M se déplace dans le plan passant par O et $\perp$ à $\vec{L}_O(M)$



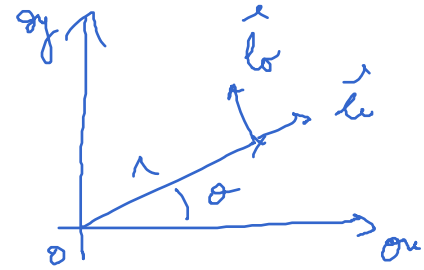
On peut donc travailler dans la suite en coordonnées polaires.

Conséquence 2: la loi des aires

Le moment cinétique de M s'écrit:

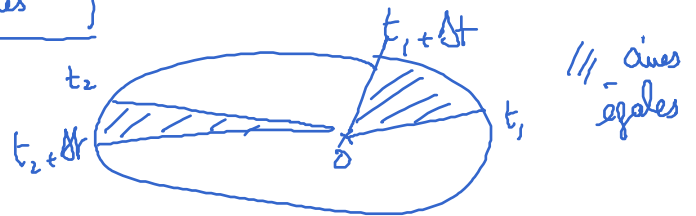
$$\begin{aligned} \vec{L}_O(M) &= \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R) \\ &= r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \\ &= m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$C = r^2 \dot{\theta} = \text{cste des aires} = L_O/m$



2ème loi de Kepler:

le rayon vecteur $\vec{OM}$ balaie des aires égales en des temps égaux. Plus M est proche de O et plus il va vite

2. Conservation de l'énergie mécanique le système est conservatif donc $E_m = \text{cste}$

Expression de la vitesse: $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \dot{r}\vec{e}_r + \frac{C}{r}\vec{e}_\theta$

Expression de l'énergie mécanique:

$$E_m = \frac{m v^2}{2} + E_p(r) = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \left(\frac{m C^2}{2 r^2} + E_p(r) \right)$$

fonction de r

Expression de l'énergie potentielle effective ou efficace:

$$E_m = \underbrace{\frac{m \dot{r}^2}{2}}_{E_c \text{ radiale}} + E_{\text{eff}}(r) \quad \text{avec} \quad E_{\text{eff}}(r) = \frac{m C^2}{2 r^2} + E_p(r) = \frac{L^2}{2 m r^2} + E_p(r)$$

$$E_c \text{ radiale} \geq 0$$

le $m \dot{r}^2$ est positif que pour $E \geq E_{\text{eff}}$

II. Exemples: les forces Newtoniennes

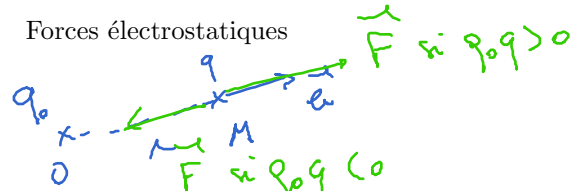
Forces gravitationnelles



$$\vec{F} = -G_y \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$$

$$E_p = -G_y \frac{m_0 m}{r}$$

Forces électrostatiques



$$\vec{F} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$E_p = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Les forces Newtoniennes se mettent sous la forme:

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec } K = -G_y m_0 m : \text{gravitation}$$

$$\text{ou } K = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} : \text{électrostatique}$$

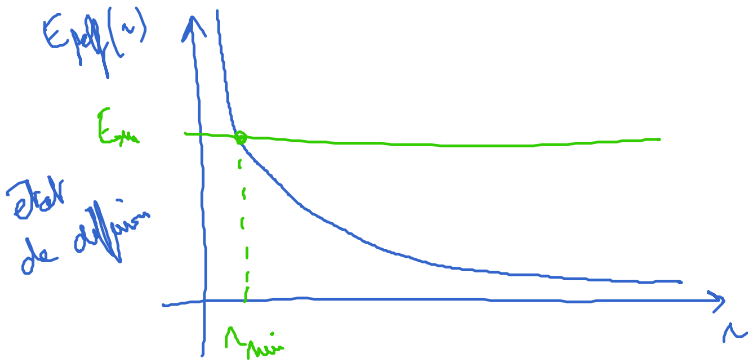
1. Cas répulsif

Expression de l'énergie potentielle effective: $E_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r} > 0$

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec } K > 0$$

Interprétation graphique:

$$E_m = \text{cte} \quad \text{et} \quad E_m = \underbrace{m \frac{\dot{r}^2}{2}}_{\geq 0} + E_{\text{eff}}(r) \quad \text{le m.t. n'est finie que pour } E_m \geq E_{\text{eff}}$$



M ne peut se trouver que pour $r \geq r_{\min}$:
m.t. hyperbolique

$$r_{\min} \text{ défini par } E_m = E_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r} \quad \text{à résoudre}$$

$$\text{à l'infini: } E_p \rightarrow 0 \quad E_m = \frac{m V_\infty^2}{2} \Rightarrow V_\infty = \sqrt{\frac{2E_m}{m}}$$

2. Cas attractif

Expression de l'énergie potentielle effective:

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec } K < 0$$

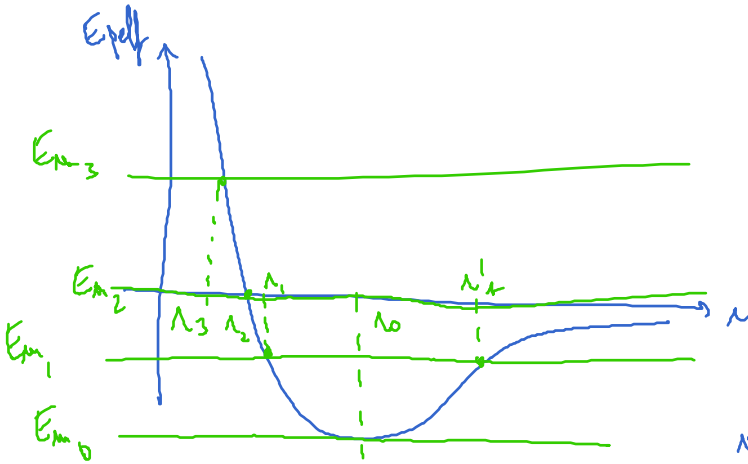
$$E_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{K}{r} \quad \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

Minimum de l'énergie potentielle effective:

$$\frac{dE_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{L^2}{2mr^3} - \frac{K}{r^2} = 0 \quad \text{pour } r_0 = -\frac{L^2}{2mK} > 0$$

Interprétation graphique: $E_m = \text{cte}$

$$E_m = \frac{m \dot{r}^2}{2} + E_{\text{pot}}(r) \quad \text{le m.t. n'est finie que pour } E_m \geq E_{\text{eff}}$$



m.t. hyperbolique: $r > r_3$

m.t. parabolique: $r > r_2$

m.t. elliptique: $r_1 < r < r_2$

m.t. circulaire: $r = r_0$

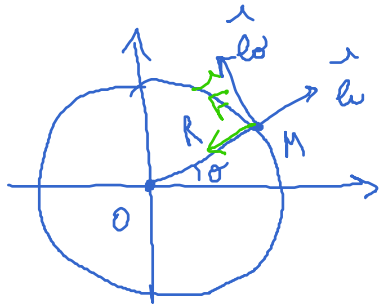
état de diffusion

état lié

III. Application à la mécanique céleste

1. Mouvement circulaire

Expression de la vitesse:



$$m \frac{dv^2}{dt} = - \frac{G m_0 m}{R^2}$$

$$\text{ou } \frac{dv}{dt} = 0 : \text{ m.t. uniforme}$$

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{G m m_0}{R^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{G m_0}{R}}$$

Expression de la période:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{G m_0}}$$

$$3^{\text{me}} \text{ loi de Kepler: } \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G m_0}$$

Expression de l'énergie mécanique:

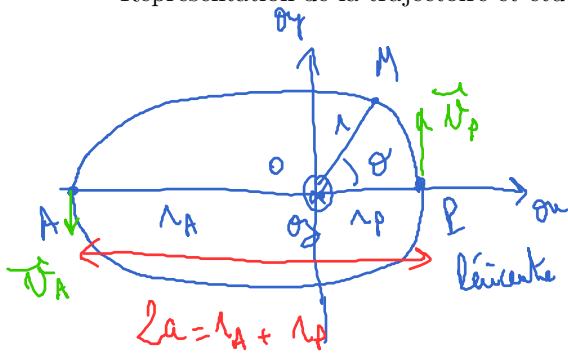
$$E_m = m \frac{v^2}{2} - \frac{G m m_0}{R} = \frac{m G m_0}{2R} - \frac{G m m_0}{R} = - \frac{G m m_0}{2R}$$

2. Mouvement elliptique

Exploitation des résultats concernant l'orbite circulaire:

les expressions de T et de E_m de l'orbite circulaire sont valables pour l'ellipse à condition de remplacer R par a (le demi-grand axe de l'ellipse): $E_m = - \frac{G m m_0}{2a}$ et $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G m_0}$

Représentation de la trajectoire et étude de deux points particuliers:



$$\left. \begin{aligned} \vec{L}_O(A) &= \vec{OA} \wedge m \vec{v}_A = m r_A v_A \vec{e}_\theta \\ \vec{L}_O(P) &= \vec{OP} \wedge m \vec{v}_P = m r_P v_P \vec{e}_\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_A v_A = r_P v_P$$

$$E_m = \frac{m v_A^2}{2} - \mathcal{G} \frac{m m_0}{r_A} = \frac{m v_P^2}{2} - \mathcal{G} \frac{m m_0}{r_P}$$

Rq: $E_m = -\mathcal{G} \frac{m m_0}{2a} = \frac{m v^2}{2} - \mathcal{G} \frac{m m_0}{r}$ soit a' calculer la vitesse de M en tt point de l'ellipse:

$$v^2 = \sqrt{2 \mathcal{G} m_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}$$

3. Des applications en astronautique

Orbite géostationnaire: l'orbite géostationnaire est une orbite circulaire dans le plan équatorial et géosynchrone (période orbitale égale au jour sidéral terrestre).

Son altitude se déduit de la 3^{ème} loi de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (R_T + h)^3}{\mathcal{G} M_T} \text{ soit } h = \left(\mathcal{G} \frac{M_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T = 36000 \text{ km}$$

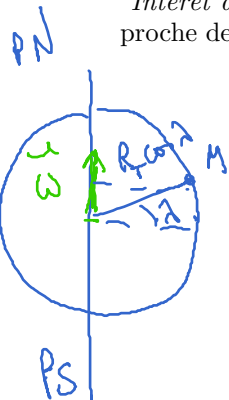
avec $T = 24 \times 3600 \text{ s}$

Vitesse de libération: c'est la vitesse minimale à communiquer à un corps pour qu'il puisse quitter définitivement la surface d'un astre tel que la Terre.

l'énergie la plus faible pour un état de diffusion est: $E_m = 0$

$$E_m = 0 = \frac{m v^2}{2} - \mathcal{G} \frac{m m_0}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \mathcal{G} m_0}{r}} \text{ avec } r = R_T$$

Intérêt d'un lancement depuis l'équateur: pourquoi est-il intéressant de lancer les fusées depuis une base proche de l'équateur (exemple: Kourou en Guyane Française à la latitude $\lambda = 5^\circ$) ?



La Terre tourne sur elle-même à la vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{ter}}} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

Les objets fixes sur la Terre ont donc un m^{tt} circulaire dans le réf. géocentrique de rayon $R_T \cos \lambda$ donc la vitesse $v = \omega R_T \cos \lambda$

Les objets possèdent une E_c égale à $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda$, elle est maximale pour $\lambda = 0$: donc la fusée a une E_c liée au m^{tt} de rotation autour de la Terre qui fait qu'on a besoin de - d'énergie pour l'envoyer