

Partie III

Q27- La sonde subit la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_J m}{r^2} \vec{e}_r$. Le moment de cette force est nul donc par application du théorème du moment cinétique à la sonde par rapport à J dans le référentiel jupitérocentrique galiléen on a $\frac{d\vec{L}_J}{dt} = \vec{J}\vec{M}\Lambda\vec{F} = \vec{0}$: le moment cinétique de la sonde par rapport à J est une constante du mouvement.

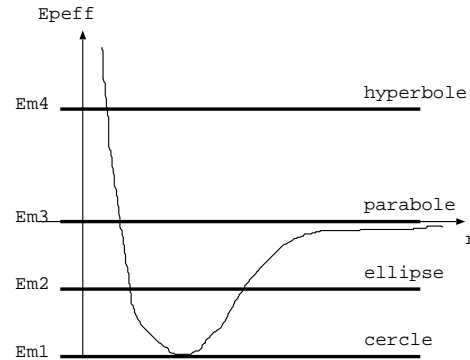
Le vecteur moment cinétique de P par rapport à J s'écrit $\vec{L}_J(P) = \vec{J}\vec{P}\Lambda m\vec{v}(P)$. Par définition du produit vectoriel les vecteurs $\vec{J}\vec{P}$ et $\vec{v}(P)$ sont perpendiculaires au vecteur $\vec{L}_J(P)$, qui est un vecteur constant donc les vecteurs position et vitesse sont à tout instant dans le plan contenant J et perpendiculaire au moment cinétique de P.

En coordonnées polaires on a $\vec{J}\vec{P} = r\vec{e}_r$ et $\vec{v}(P) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $\vec{L}_J(P) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$, la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est donc constante, elle s'appelle la constante des aires.

Q28- La force gravitationnelle est conservative donc $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{J}\vec{P} = -\frac{\mathcal{G}M_J m}{r^2} dr = -d\mathcal{E}_p$ soit $\mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G}M_J m}{r} + A$ avec $A = 0$ car pour $r \rightarrow \infty$ l'énergie potentielle est nulle.

Q29- La sonde constitue un système conservatif donc son énergie mécanique est constante. Elle s'écrit

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{\mathcal{G}M_J m}{r} = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} - \frac{\mathcal{G}M_J m}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}M_J m}{r} \text{ avec } C = r^2\dot{\theta}.$$



Q30- La sonde peut échapper à l'attraction de Jupiter lorsqu'elle est dans un état de diffusion, soit pour une énergie mécanique positive ou nulle. L'énergie minimale à lui communiquer est une énergie nulle soit

$$\mathcal{E}_m = 0 = \frac{mv_l^2}{2} - \frac{\mathcal{G}M_J m}{r} \text{ d'où } v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_J}{r}}.$$

Q31- Jupiter subit la force d'attraction gravitationnelle du soleil $\vec{F}_J = -\frac{\mathcal{G}M_S M_J}{d^2} \vec{U}_{x'}$. On applique la RFD à Jupiter dans le référentiel héliocentrique galiléen soit $M_J \vec{a}_J = -\frac{M_J v^2}{d} \vec{U}_{x'} + M_J \frac{dv}{dt} \vec{U}_{y'} = -\frac{\mathcal{G}M_S M_J}{d^2} \vec{U}_{x'}$.

En projection sur Oy' on en déduit que la vitesse est constante.

En projection sur Ox' on en déduit que $v(J)/R_h = v_{J,h} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{d}}$. La vitesse angulaire est donc $\Omega =$

$$\frac{v_{J,h}}{d} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{d^3}}.$$

Q32- Le référentiel R' est en rotation dans R_h , il n'est donc pas en translation rectiligne uniforme dans R_h galiléen, il n'est pas galiléen.

Q33- Dans le référentiel R' , la sonde subit:

- les forces d'interaction gravitationnelle $\vec{F}_J = +\frac{\mathcal{G}M_J m}{r^2} \vec{U}_{x'}$ et $\vec{F}_S = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{(d-r)^2} \vec{U}_{x'}$
- la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = +m\Omega^2 \vec{S}\vec{P} = m\Omega^2 (d-r) \vec{U}_{x'} = \frac{\mathcal{G}M_S m (d-r)}{d^3} \vec{U}_{x'}$
- la force d'inertie de Coriolis est nulle quand la sonde est à l'équilibre dans R'

Q34- A l'équilibre dans R' , la somme des forces qui s'exercent sur la sonde est nulle soit: $0 = +\frac{\mathcal{G}M_J m}{r^2} - \frac{\mathcal{G}M_S m}{(d-r)^2} + \frac{\mathcal{G}M_S m (d-r)}{d^3}$

$$\text{On simplifie par } \mathcal{G}m \text{ soit: } \frac{M_J}{r^2} = \frac{M_S}{(d-r)^2} - \frac{M_S (d-r)}{d^3} = \frac{M_S}{d^3 (d-r)^2} (d^3 - (d-r)^3).$$

$$\text{On trouve donc } M_J d^3 (d-r)^2 = M_S r^2 (d^3 - (d-r)^3).$$

On cherche à faire apparaître des termes de la forme $(1 - \frac{r}{d})^\alpha$ qui donne par un DL à l'ordre 1: $1 - \alpha \frac{r}{d}$

Soit $M_J d^5 (1 - \frac{r}{d})^2 = M_S r^2 d^3 (1 - (1 - \frac{r}{d})^3)$ qui donne par un DL: $M_J d^5 (1 - 2\frac{r}{d}) = M_S r^2 d^3 (1 - (1 - 3\frac{r}{d}))$

soit $M_J (1 - 2\frac{r}{d}) = M_S \frac{r^2}{d^2} 3\frac{r}{d}$ ou encore $M_J \approx 3M_S \frac{r^3}{d^3}$ donc la position d'équilibre est $r = r_H = d(\frac{M_J}{3M_S})^{1/3}$.

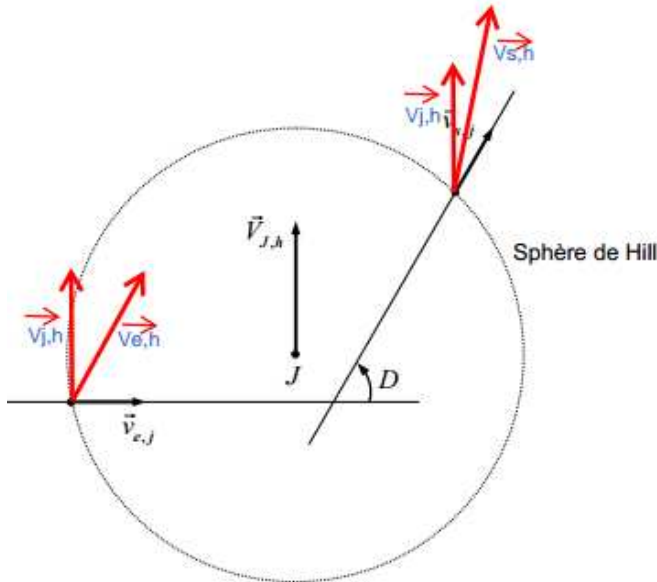
Q35- On écrit l'énergie mécanique à l'entrée et à la sortie de la sphère de Hill, ces deux énergies mécaniques sont égales soit $\mathcal{E}_m = \frac{mv_{e,j}^2}{2} - \frac{\mathcal{G}M_J m}{r_H} = \frac{mv_{s,j}^2}{2} - \frac{\mathcal{G}M_J m}{r_H}$: à l'entrée et à la sortie, les énergies mécaniques (l'énergie mécanique se conserve) et potentielles (en ces points c'est la même valeur de r) sont égales donc en ces points les énergies cinétiques donc les normes des vitesses sont égales soit $v_{s,j} = v_{e,j} = v_j$.

Q36- La sonde arrive de l'infini et part à l'infini elle est donc dans un état de diffusion donc sa vitesse est supérieure à la vitesse de libération. AN: $v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_J}{r_H}} = 2,2 \text{ km/s} < v_j$.

Q37- La loi de composition des vitesses s'écrit $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ avec $\vec{v}_e = \vec{V}_{j,h}$ car ici le référentiel jupitérocentrique est en translation rectiligne uniforme dans le référentiel héliocentrique (puisque Jupiter se déplace avec un vecteur vitesse constant).

soit ici $\vec{v}_{e,h} = \vec{v}_{e,j} + \vec{V}_{j,h}$.

De la même façon à la sortie de la sphère de Hills $\vec{v}_{s,h} = \vec{v}_{s,j} + \vec{V}_{j,h}$.



Q38-

Par construction, comme le vecteur $\vec{v}_{e,j}$ fait un angle plus grand par rapport au vecteur $\vec{V}_{j,h}$ que le vecteur $\vec{v}_{s,j}$, le vecteur vitesse en sortie est de norme plus grand que le vecteur vitesse en entrée dans le référentiel héliocentrique.

L'augmentation de vitesse serait maximale pour un angle de déviation de 90° ainsi la vitesse relative en sortie et la vitesse d'entraînement seraient colinéaires et donc la vitesse absolue serait maximale.

Q39- D'après Pythagore $v_{s,h} = \sqrt{v_{e,h}^2 + V_{j,h}^2} = \sqrt{v_j^2 + V_{j,h}^2}$.

On a $\vec{v}_{s,h}^2 = (\vec{v}_{s,j} + \vec{V}_{j,h})^2 = v_j^2 + V_{j,h}^2 + 2\vec{v}_{s,j} \cdot \vec{V}_{j,h} = v_j^2 + V_{j,h}^2 + 2v_j V_{j,h} \cos(\frac{\pi}{2} - D)$ soit $v_{s,h} = \sqrt{v_j^2 + V_{j,h}^2 + 2v_j V_{j,h} \sin D}$.

Q40- AN: $v_{e,h} = 16 \text{ km/h}$ et $v_{s,h} = 22 \text{ km/h}$ d'où $\Delta\mathcal{E}_{c,h} = 81.10^9 \text{ J}$. Le gain d'énergie cinétique vient du travail de la force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter.

Q41- L'assistance gravitationnelle est plus efficace que les propulseurs.