Corrigé du sujet e3a PC 2020

1. $\overrightarrow{F} = -G\dfrac{mM_T}{r^2}\vec{u}_r$.
2. (a) Comme il s'agit d'une force centrale, son moment calculé par rapport à O est nul, donc d'après le TMC, le moment cinétique du satellite est constant. On en déduit que le mouvement est plan.

   (b) Comme il n'y a pas de frottements, d'après le théorème de l'énergie mécanique, E_m est conservée.

   (c) La force de gravitation est une force conservative associée à l'énergie potentielle $E_p = -G\dfrac{mM_T}{r}$.

   On utilise les coordonnées polaires dans le plan perpendiculaire au moment cinétique. La norme du moment cinétique s'écrit alors $L_O = mr^2\dot{\theta} = mC$ avec la constante des aires. Et la norme de la vitesse au carré vaut $v^2 = \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + (r\dot{\theta})^2 = \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{C}{r}\right)^2$.

   On en déduit l'expression de l'énergie cinétique $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\left(\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{C}{r}\right)^2\right)$,

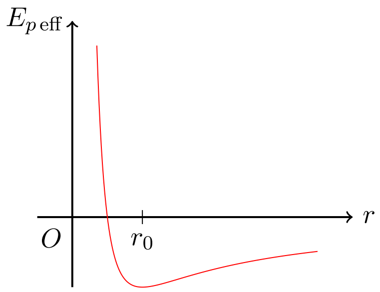
   puis l'expression de l'énergie mécanique

   $E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 - G\dfrac{mM_T}{r} + \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2}$.

   En posant $A = GmM_T$ et $B = \dfrac{1}{2}mC^2$, on retrouve bien l'expression de l'énoncé.

3. On a $\dfrac{dE_{p\,\text{eff}}}{dr} = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{2B}{r^3} = \dfrac{Ar - 2B}{r^3}$.

   La dérivée s'annule donc pour $r_0 = \dfrac{2B}{A}$. Il s'agit du rayon de l'orbite circulaire stable du satellite. Sur l'orbite de travail d'un satellite NAVSTAR, on a $r_0 = 2,64.10^4$ km.



   $\dfrac{d^2E_{p\,\text{eff}}}{dr^2}(r_0) = \dfrac{2B}{r_0^4} > 0$, donc il s'agit bien d'un minimum. $E_{p\,\text{eff}}$ est l'énergie potentielle effective du système.

4. D'après la troisième loi de Képler, la période de révolution du satellite vaut

   $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r_0^3}{GM_T}} = 4,26.10^4$ s $= 11$ h 50 min 19 s.

   Le satellite fait donc un peu plus de deux fois le tour de la Terre en un jour sidéral.

5. $E_{m1} = -G\dfrac{mM_T}{2(R_T + h_1)} = -2,02.10^{10}$ J.
6. La valeur optimale est $\lambda = 0$ afin que le satellite au sol ait le maximum d'énergie mécanique. On a alors $E_{m0} = -5,00.10^{10}$ J.

   Les moteurs doivent donc fournir environ 30 GJ au satellite pour le mettre sur sa première orbite.

7. Le demi grand axe vaut $a = \dfrac{R_T + h_1 + r_0}{2}$, donc $E_{m12} = -9,34$ GJ.

8. Si le satellite n'a quasiment pas bougé, sa variation d'énergie mécanique correspond à la variation d'énergie cinétique, soit $E_{m12} - E_{m1} = \frac{1}{2}m(V_1 + \Delta V_1)^2 - \frac{1}{2}mV_1^2$.

   De plus, on sait que pour une trajectoire circulaire, on a $E_{m1} = -E_{c1} = -\frac{1}{2}mV_1^2$, donc $V_1 = \sqrt{\frac{-2E_{m1}}{m}} = 7,11$ km.s^{-1}.

   On en déduit que $\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2(E_{m12} - 2E_{m1})}{m}} - V_1 = 1,70$ km.s^{-1}.

9. Le satellite décrit une demi ellipse pour changer d'orbite, donc le transert dure une demi période $\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{(R_T + h_1 + r_0)^3}{8GM_T}} = 1,12.10^4$ s = 3,11 h.

10. Un satellite géostationnaire a une période de rotation de un jour sidéral. Il est donc immobile au dessus d'une point donné de la Terre, avec une orbite circulaire dans le plan de l'équateur à une altitude d'environ 36.10^3 km.

    Il permet de faire des observations continues d'une même zone (intéressant pour la météo).

11. Il faudrait beaucoup trop de satellites géostationnaires pour un système GPS afin de pouvoir avoir au minimum quatre satellites à proximité d'un point de la surface de la Terre.