

CCINP Physique PC 2019

Proposition de corrigé

Ce corrigé à été rédigé par David LASNE. N'hésitez pas à me signaler par mail (david.lasne@wanadoo.fr) toute coquille ou erreur. Vous pouvez le distribuer à vos élèves. Merci à Matthieu RIGAUT pour les discussions et la correction.

Par ailleurs quelques imperfections ou ambiguïtés repérées dans l'énoncé de cette épreuve sont notées en rouge au fur et à mesure.

Partie I - Limite du modèle de J. J. THOMSON à travers l'expérience de E. RUTHERFORD

Q1. Si la charge positive était répartie uniformément, le "rebond" ne serait pas aléatoire : soit l'énergie cinétique initiale est trop faible et la répulsion électrostatique revoit les particules alpha, soit elle est suffisante et elles passent toutes au travers.

Q2. Il s'agit de la force électrostatique entre la charge $2e$ de la particule alpha et la charge Ze du noyau d'or donc d'après

le cours : $\vec{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{e}_r = \frac{K}{d^2} \vec{e}_r$. C'est une force newtonienne dont l'énergie potentielle s'écrit $E_p(d) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{K}{d}$ (la constante est nulle pour avoir la limite demandée).

Cette force est à la fois centrale, ce qui implique que le moment cinétique est conservé, et conservative, ce qui implique la conservation de l'énergie mécanique (car c'est la seule force en présence ici).

Q3. L'énergie mécanique étant constante, elle vaut sa valeur initiale. Or à $t = 0$, la particule est à l'infini donc son énergie potentielle est nulle. Il reste donc simplement $E_M = E_M(t=0) = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$.

Q4. Par définition $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m_\alpha \vec{v}_0 = (X\vec{e}_x + b\vec{e}_y) \wedge m_\alpha v_0 \vec{e}_x$

$$\vec{L}_O = -m_\alpha b v_0 \vec{e}_z$$

Q5. De même à un instant quelconque : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m_\alpha \vec{v} = d\vec{e}_r \wedge m_\alpha (d\dot{\vec{e}}_r + d\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$

$$\vec{L}_O = m_\alpha d^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

On a donc à chaque instant, par conservation de \vec{L}_O : $d^2 \dot{\theta} = -b v_0$.

Q6. Au sommet de la trajectoire, on peut à nouveau calculer \vec{L}_O facilement car la vitesse est orthogonale au rayon. On en déduit $d_m v_S = b v_0$ par conservation.

Et par conservation de l'énergie mécanique, on a

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_S^2 + \frac{K}{d_m} = \frac{1}{2} m_\alpha v_0^2$$

En remplaçant v_S par la relation précédente et en multipliant tout par $\frac{2d_m^2}{m_\alpha v_0^2}$, on obtient :

$$d_m^2 - \frac{2K}{m_\alpha v_0^2} d_m - b^2 = 0$$

On résout cette équation du second degré :

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \pm \sqrt{\frac{K^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + b^2}$$

Seule la solution avec un "+" est positive donc on garde $d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} + \sqrt{\frac{K^2}{m_\alpha^2 v_0^4} + b^2}$.

Q7. Le PFD projeté sur \vec{e}_x donne :

$$m_\alpha \frac{dv_x}{dt} = \frac{K}{d^2} \cos \theta = -\frac{K}{b v_0} \dot{\theta} \cos \theta$$

On intègre cette relation entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$:

$$m_\alpha(v_x(\infty) - v_0) = -\frac{K}{bv_0} [\sin\theta]_0^\infty$$

Or $v_x(\infty) = v_0 \cos\varphi$, $\theta(0) = \pi$ et $\theta(\infty) = \varphi$:

$$m_\alpha v_0(1 - \cos\varphi) = -\frac{K}{bv_0} \sin\varphi$$

En utilisant les formules de l'énoncé, on obtient :

$$2m_\alpha v_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{bv_0} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

Donc en simplifiant on obtient la relation demandée :

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{K}{m_\alpha b v_0^2}$$

Q8. Il y aura "rebond" si $\varphi > \frac{\pi}{2}$, pour que les particules repartent en arrière.

Ceci nécessite que $b < \frac{K}{m_\alpha v_0^2}$, donc que b soit "suffisamment petit" : il faut envoyer la particule alpha "suffisamment près" du noyau pour voir l'effet.

Q9. En reprenant l'expression de d_m :

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{m_\alpha^2 v_0^4 b^2}{K^2}} \right)$$

On reconnaît sous la racine l'expression correspondant à $\tan \frac{\varphi}{2}$:

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}} \right) = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \right)$$

En simplifiant (car $\sin \frac{\varphi}{2} > 0$ ici), on obtient bien :

$$d_m = \frac{K}{m_\alpha v_0^2} \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)$$

Q10. d_m est minimale lorsque $\sin \frac{\varphi}{2}$ est maximal donc pour $\varphi = \boxed{\varphi_m = \pi}$. On a alors $\boxed{d_{m,min} = \frac{2K}{m_\alpha v_0^2}}$.

Q11. Avec la relation de la Q7., on vérifie que cette situation correspond à $\boxed{b \rightarrow 0}$. La trajectoire est alors rectiligne, droit en direction du noyau, avec un demi-tour à une distance $d_{m,min}$ de O . Si la particule peut arriver jusqu'en $d_{m,min}$ avant de faire demi-tour, c'est que le noyau est un peu plus loin, donc plus petit que $d_{m,min}$.

Application numérique : $d_{m,min} = \frac{2K}{m_\alpha v_0^2} = \frac{K}{E_c} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 E_c} \approx 5.10^{-14} \text{ m}$

Q12. Pour sonder l'intérieur du noyau, il faut diminuer $d_{m,min}$ donc augmenter l'énergie cinétique des particules incidentes.

Partie II - Limite du modèle planétaire

Q13.

On applique le PFD à l'électron, soumis uniquement à la force électrostatique et on le projette dans la base cylindrique (avec $r = cste$) :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\begin{cases} -m_e r \dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ m_e r \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que la norme de la vitesse est constante et que finalement $\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} \vec{e}_\theta}$.

Q14. L'énergie mécanique s'écrit : $E_M = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ en remplaçant par l'expression de v . On a donc $A = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}$

et $f(r) = \frac{1}{r}$.

Q15. $\omega = \dot{\theta} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}}$ donc en remplaçant dans l'expression de $P(r)$, on obtient :

$$P(r) = \frac{P_0}{r^4} \text{ avec } P_0 = \frac{e^6}{192\pi^3 c^3 \epsilon_0^3 m_e^2}$$

Si $P(r)$ est une puissance (fallait-il le redémontrer?), P_0 s'exprime en W.m^4 .

$P(r)$ représente l'énergie perdue par rayonnement par unité de temps, donc l'énergie mécanique de l'électron diminue. Comme $A < 0$ et $f(r)$ est décroissante, le rayon diminue aussi.

Q16. On applique le théorème de la puissance mécanique (ie un bilan d'énergie mécanique) à l'électron, sachant que $P(r)$ est la puissance perdue. On a donc :

$$\frac{dE_M}{dt} = -P(r) \Rightarrow -\frac{A}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{P_0}{r^4}$$

$$r^2 \frac{dr}{dt} = \frac{P_0}{A}$$

Comme $A < 0$, le rayon diminue bien.

Q17. On sépare les variables avant d'intégrer :

$$\int_R^0 r^2 dr = \int_0^{t_f} \frac{P_0}{A} dt \Rightarrow t_f = -\frac{AR^3}{3P_0}$$

Application numérique : $\frac{-A}{P_0} = \frac{24\pi^2 c^3 \epsilon_0^2 m_e^2}{e^4} \approx 6,4 \cdot 10^{20} \text{ s.m}^{-3}$ donc $t_f \approx 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ s}$. L'atome ne serait stable que pendant un temps infiniment court, c'est impossible.

Partie III - Postulats de N. BOHR

Q18. D'après le postulat mécanique, $L = n\hbar$. Or pour une trajectoire circulaire, on a $L = m_e r v = \frac{m_e r e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$ donc en remplaçant et en élevant au carré, on obtient :

$$r = n^2 r_0 \text{ avec } r_0 = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}$$

Application numérique : $r_0 = 53 \text{ pm}$

Q19. Le périmètre vérifie : $\mathcal{P} = 2\pi r = n\lambda$. Or d'après DE BROGLIE, $\lambda = \frac{h}{p}$. On en déduit $r = n \frac{h}{p}$ soit $L = r p = n\hbar$ qui est le postulat mécanique précédent.

Q20. On remplace r par son expression dans l'énergie mécanique et il vient $E_M = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 n^2 r_0}$ donc on a bien $E_M = -\frac{E_0}{n^2}$ avec

$$E_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2}$$

Application numérique : $E_0 \approx 13 \text{ eV}$

Physiquement, E_0 est l'énergie d'ionisation du niveau fondamental.

Q21. D'après la relation de PLANCK-EINSTEIN, l'énergie du photon émis s'écrit :

$$E_\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_{n_i} - E_{n_f} = -E_0 \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

On a donc bien

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ avec } R_H = \frac{E_0}{hc}$$

Application numérique : $R_H \approx 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$.

Q22. Ces trois raies sont dans l'ultraviolet.

On trouve pour les 3 raies ($n_i = 2, 3$ ou 4) on trouve bien $R_H \approx 1,1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ en gardant 2 chiffres significatifs.

Les trois valeurs obtenues sont en très bon accord avec la théorie. Cependant, ce modèle n'est valable que pour l'hydrogène et les ions hydrogénoïdes (avec 1 seul électron).

Partie IV - Expérience de O. STERN et W. GERLACH

Q23. Par définition du moment magnétique, $\vec{m} = IS\vec{n}$ avec $S = \pi r^2$ et $\vec{n} = \vec{e}_z$ si on oriente I dans le sens de \vec{e}_θ . Or l'électron fait un tour par période, avec une charge $-e$, donc le courant vaut $I = -\frac{e}{T}$, avec $T = \frac{2\pi r}{v}$ donc finalement $\vec{m} = -\frac{erv}{2}\vec{e}_z$.

Le moment cinétique vaut quant à lui $\vec{L} = m_e r \vec{e}_r \wedge v \vec{e}_\theta = mrv\vec{e}_z$.

On a donc bien proportionnalité :

$$\vec{m} = \gamma_e \vec{L} \text{ avec } \gamma_e = \frac{-e}{2m}$$

Q24. En appliquant le TMC en C au dipôle, on a

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma}(C) = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

En remplaçant par le moment magnétique et le rapport gyromagnétique, on a :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma_e \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Si on projette sur \vec{e}_z cette équation, comme \vec{B} est selon \vec{e}_z , le produit vectoriel est orthogonal à \vec{e}_z donc $\frac{dm_z}{dt} = 0$ soit $m_z = cste$.
De plus, en multipliant scalairement par \vec{m} , il vient :

$$\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\vec{m}^2}{dt} = \vec{m} \cdot \gamma_e (\vec{m} \wedge \vec{B}) = 0$$

On en déduit que $\vec{m}^2 = cste$ donc que $m = \|\vec{m}\| = cste$.

Q25. Reprenant la relation précédente, on peut écrire :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma_e \vec{B} \wedge \vec{m}$$

On reconnaît la forme donnée par l'énoncé pour un vecteur dont l'extrémité décrit un cercle, en prenant comme vecteur rotation

$$\vec{\Omega}_L = -\gamma_e \vec{B}, \text{ donc avec la pulsation } \Omega_L = -\gamma_e B = \frac{eB}{2m_e}.$$

Q26. Si le champ était uniforme, la force $\vec{F} = (\vec{m} \cdot \text{grad})\vec{B}$ serait nulle et les atomes ne seraient jamais déviés.

Q27. Les lignes de champ sont quasi-verticales car la principale composante est sur \vec{e}_z .

Les lignes de champ sont dans le plan yOz car la composante en x est supposée nulle. De plus l'énoncé semble supposer une invariance selon x ce qui explique qu'on puisse prendre une coupe quelconque.

Le plan xOz est un plan de symétrie du problème donc $B_z(y, z)$ est paire en y .

Q28. Dans le vide, les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{MAXWELL-GAUSS : } \text{div}\vec{E} = 0 \\ \text{MAXWELL-FARADAY : } \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ (régime stationnaire)} \\ \text{MAXWELL-THOMSON : } \text{div}\vec{B} = 0 \\ \text{MAXWELL-AMPÈRE : } \text{rot}\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \text{ (régime stationnaire)} \end{cases}$$

Avec MAXWELL-AMPÈRE, on obtient en écrivant le rotationnel :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0$$

Comme $\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$, on a nécessairement $\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)_{y=0} = 0$.

Q29. L'énoncé semble supposer, sans l'indiquer explicitement, que toute dépendance en x est négligée. On calcule alors la force (en $y = 0$) :

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= (\vec{m} \cdot \text{grad})\vec{B} \\
 &= m_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + m_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + m_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \\
 &= m_y \frac{\partial B_y}{\partial y} \vec{e}_y + m_y \frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{e}_z + m_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z + m_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{e}_y
 \end{aligned}$$

Q30. On estime Ω_L et la période de révolution associée :

Application numérique : $\Omega_L \approx 8.8 \cdot 10^{10} \text{ rad.s}^{-1}$ soit $T_L \approx 7.1 \cdot 10^{-11} \text{ s}$

Lors de la traversée, l'atome effectue un très grand nombre de précessions autour de l'axe z , donc m_y change très rapidement de signe, avec une moyenne nulle : $\langle m_y \rangle = 0$. On peut donc se contenter de la composante sur \vec{e}_z dans la force.

Q31. Les lignes de champ sont orientées du pôle Nord vers le pôle Sud donc $B_z > 0$. De plus, les lignes de champ se resserrent au voisinage de l'aimant du haut, donc le champ y est plus intense, donc $\frac{\partial B_z}{\partial z} > 0$. On en déduit que si $m_z > 0$, la force est bien dirigée selon $+\vec{e}_z$.

Q32. Statistiquement, toutes les orientations de \vec{m} sont possibles dans le jet incident donc m_z prend des valeurs dans un intervalle continu : on doit avoir un ensemble de déviations possibles continu.

Q33. On en déduit que m_z (et $|m|$) sont quantifiés.

NB : En réalité, la physique quantique montrera qu'avec un seul électron de valence, m_z devrait prendre 3 valeurs quantifiées et non 2 ($m = -1, 0, 1$) : ce sont en fait les 2 valeurs possibles du *spin* de l'électron qu'ont observées STERN et GERLACH.

Partie V - L'effet ZEEMAN normal

Q34. D'après la relation de PLANCK-EINSTEIN, l'énergie du photon émis s'écrit : $\frac{hc}{\lambda} = E_2 - E_1$. Si l'écart d'énergie est faible, on peut différentier (en valeur absolue) :

$$\Delta E \approx \frac{hc}{\lambda_0^2} \Delta \lambda \Rightarrow \Delta \lambda \approx \frac{\lambda_0^2 \Delta E}{hc}$$

Application numérique : $\Delta \lambda \approx 0,02 \text{ nm}$

Q35. Le calcul est totalement analogue à celui de la lame d'air sur un MICHELSON. Le rayon 2 parcourt en plus le trajet $(M_1 O_1 M_2) = \frac{2e}{\cos \theta}$ auquel il faut soustraire le chemin optique $(M_1 H) = M_1 M_2 \sin \theta = 2e \tan \theta \sin \theta$ en notant H le projeté orthogonal de M_2 sur le rayon 1. D'après le théorème de MALUS (et le principe de retour inverse de la lumière) le chemin optique est ensuite le même pour les 2 rayons. On obtient donc

$$\delta = \frac{2e}{\cos \theta} - 2e \tan \theta \sin \theta = 2e \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = 2e \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta}$$

On a donc bien $\delta = 2e \cos \theta$ donc une différence de phase $\varphi = \frac{4\pi e \cos \theta}{\lambda}$.

Q36. les rayons qui interfèrent sont parallèles, ils "se croisent" donc à l'infini. Il faut donc mettre l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente (ou éventuellement à très grande distance). On obtient comme dans le cas du MICHELSON en lame d'air, des anneaux d'égale inclinaison.

Q37. L'intensité est maximale lorsque les rayons interfèrent constructivement, donc lorsque $\varphi = k \cdot 2\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Q38. L'intensité lumineuse étant proportionnelle au carré de l'amplitude, on peut remplacer r^2 par R et t^2 par $1 - R$, ce qui donne :

$$m = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

Quel est l'intérêt de la question ? Le résultat n'est pas utilisé par la suite car le résultat est donné. De plus, le lien entre r , t et R n'est pas explicitement une relation du cours et mériterait une justification plus précise

Q39. D'après l'expression donnée de la largeur à mi-hauteur, $\Delta\varphi_{1/2}$ décroît avec R , donc la courbe c où les pics sont les plus fins correspond à la plus grande valeur de R . On a alors un meilleur contraste donc des franges fines sur fond noir. Finalement, on peut dire que $R_a = 0,1$; $R_b = 0,5$; $R_c = 0,1$.

Q40. Plus R est important, moins la lumière sort de la cavité donc le fond est très sombre, sauf pour les quelques valeurs de φ qui donnent des interférences constructives intenses.

Q41. Au centre, $\theta = 0$ donc $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$ qui prend une valeur a priori quelconque. Si R est suffisamment important, on a de fortes chances d'avoir une zone sombre.

Q42. Pour que l'on puisse les distinguer, il faut que le deuxième anneau soit au-delà de la largeur à mi-hauteur du premier, donc on peut estimer que l'on pourra les distinguer si $\rho_2 > \rho_1 + \Delta\rho_{1/2}$.

Q43. Sous incidence nulle, on a $\Delta\lambda_{min} = \frac{\lambda^2}{2Fe}$.

Application numérique : $\Delta\lambda_{min} \approx 7.10^{-13}$ m : l'effet ZEEEMAN sera bien observable.

Partie VI - Orbitales atomiques

Q44. Une particule quantique est décrite par sa fonction d'onde, avec une approche statistique : on ne parle plus de position ou de trajectoire mais de probabilité de présence.

Q45. $|\varphi(\vec{r})|^2$ représente la densité volumique de probabilité de présence de la particule.

Q46. On obtient ce facteur via la condition de normalisation : la somme de toutes les probabilités de présence doit être égale à 1 : $\iiint_V |\varphi(\vec{r})|^2 d\tau = 1$.

Q47. On injecte la solution proposée dans l'équation de SCHRÖDINGER :

$$E\varphi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-r/r_0} \right) \right) + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \varphi(\vec{r})$$

On développe la dérivée et il vient :

$$E\varphi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{2m_e r_0 \sqrt{\pi r_0^3}} \left(\frac{2}{r} e^{-r/r_0} - \frac{1}{r_0} e^{-r/r_0} \right) + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \varphi(\vec{r})$$

Or compte-tenu de l'expression de r_0 , les deux termes en $1/r$ se simplifient (ce qui est rassurant car E est une constante) et on peut alors identifier :

$$E\varphi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} \varphi(\vec{r})$$

On retrouve bien, en remplaçant r_0 par son expression $E_0 = \frac{\hbar^2}{2m_e r_0^2} = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}$.

Q48. On note $dP(r)$ la probabilité de trouver la particule entre r et $r + dr$. On a alors :

$$dP(r) = 4\pi r^2 dr |\varphi(r)|^2$$

En remplaçant par l'expression de $\varphi(r)$, on obtient :

$$dP(r) = \frac{4r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0} dr$$

La densité de probabilité radiale est donc $P(r) = \frac{4r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0}$.

Q49. On obtient la moyenne en calculant l'intégrale de $\int_0^\infty r.P(r)dr$. Le résultat obtenu donne une moyenne supérieure à r_0 (maximum de $P(r)$) car la fonction est "plus étalée" sur la droite du pic donc ces valeurs contribuent à déplacer la moyenne. **Je ne suis pas convaincu de l'intérêt de la question, ni de la réponse...**

***** FIN DU CORRIGE *****