

I. Correction: radioactivité alpha: mines PC 2016

18- La probabilité de trouver la particule entre x et $x + dx$ est $dP = |\underline{\psi}(x, t)|^2 dx$. On en déduit que la fonction d'onde a pour unité $m^{-1/2}$.

19- La grandeur $\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\psi}(x, t)|^2 dx = 1$ signifie que la probabilité que la particule se trouve sur l'axe Ox est égale à 1, soit la particule est bien quelque part sur l'axe Ox .

20- On a $|\underline{\psi}(x, t)|^2 = \frac{dP}{dx} = \rho(x, t)$, cela représente la densité de probabilité de présence de la particule en x à l'instant t . Par analogie avec les vecteurs densités de courant électrique, massique... définies par $\vec{j} = \rho \vec{v}$ et vérifiant l'équation de conservation $div \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. On définit également en mécanique quantique un vecteur \vec{j} appelé vecteur densité de courant de probabilité. Il vérifie la même équation de conservation.

21- Une particule non relativiste est une particule dont la vitesse est inférieure à $c/10 = 3.10^7$ m/s.

On remplace la fonction d'onde proposée dans l'équation de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \underline{\phi}''(x) \underline{f}(t) + V(x) \underline{\phi}(x) \underline{f}(t) = i\hbar \underline{\phi}(x) \underline{f}'(t).$$

On sépare les variables en divisant l'équation par $\underline{\phi}(x) \underline{f}(t)$, on obtient: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\underline{\phi}''(x)}{\underline{\phi}(x)} + V(x) = i\hbar \frac{\underline{f}'(t)}{\underline{f}(t)}$.

On a ici une égalité entre deux termes qui dépendent de deux variables indépendantes (le membre de gauche de l'égalité ne dépend que de x et le membre de droite ne dépend que de t).

On en déduit que les membres de cette égalité sont constants.

$$\text{On a donc } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\underline{\phi}''(x)}{\underline{\phi}(x)} + V(x) = C \text{ et } i\hbar \frac{\underline{f}'(t)}{\underline{f}(t)} = C.$$

$$\text{Soit } \frac{\underline{f}'(t)}{\underline{f}(t)} = \frac{C}{i\hbar} \text{ ou encore } \underline{f}'(t) - \frac{C}{i\hbar} \underline{f}(t) = 0 \text{ de solution } \underline{f}(t) = D e^{-iCt/\hbar}.$$

La constante C est homogène à une énergie: c'est l'énergie de la particule.

La fonction d'onde d'un état stationnaire est donc $\underline{\psi}(x, t) = \underline{\phi}(x) e^{-iEt/\hbar}$ avec $\phi(x)$ qui vérifie l'équation différentielle $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\underline{\phi}''(x)}{\underline{\phi}(x)} + V(x) = C$ soit $\underline{\phi}''(x) - \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \underline{\phi}(x) = 0$.

La probabilité de présence dP ne dépend pas du temps car $dP = |\underline{\phi}(x) e^{-iEt/\hbar}|^2 dx = |\underline{\phi}(x)|^2 dx$.

22- Pour une particule libre, on a $V = 0$ soit à résoudre: $\underline{\phi}''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \underline{\phi}(x) = 0$. On reconnaît un OH de pulsation spatiale $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ de solution $\underline{\phi}(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$.

La fonction d'onde s'écrit donc $\underline{\psi}(x, t) = A e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})} + B e^{-i(kx + Et/\hbar)}$.

Le terme $A e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})}$ représente une OPPH se propageant selon $+Ox$.

Le terme $B e^{-i(kx + \frac{Et}{\hbar})}$ représente une OPPH se propageant selon $-Ox$.

23- Le vecteur d'onde est de la forme $\vec{k} = \pm k \vec{e}_x$ (+ pour l'OPPH⁺ et - pour l'OPPH⁻) avec $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{p}{\hbar}$. Or \vec{k} et \vec{p} ont tous les deux le sens et la direction de déplacement de la particule donc la relation est valable aussi en vecteur soit $\vec{p} = \hbar \vec{k}$.

24- En mécanique classique, on a $E_m = E_c + E_p$ avec $E_c \geq 0$. Donc la particule ne peut exister que dans une zone où $E_m \geq E_c$, ce qui est le cas ici pour $x \leq 0$ et $x \geq a$. La zone $0 < x < a$ est interdite par la mécanique classique.

25- On utilise le résultat de la question 22 soit:

$$\underline{\psi}_I(x, t) = A_I e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})} + B_I e^{-i(kx + Et/\hbar)}$$

$$\underline{\psi}_{III}(x, t) = A_{III} e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})} + B_{III} e^{-i(kx + Et/\hbar)}$$

Des discontinuités de potentiel sont équivalentes à des dioptrés donc du côté $x \leq 0$ il y a l'onde incidente (qui correspond au terme $A_I e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})}$) et une onde réfléchie (qui correspond au terme $B_I e^{-i(kx + Et/\hbar)}$) et du côté $x \geq a$, il y a uniquement l'onde transmise (qui correspond au terme $A_{III} e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})}$, l' $OPPH^-$ n'existe pas donc $B_{III} = 0$).

26- On doit résoudre $\underline{\phi}_{II}''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\underline{\phi}_{II}(x) = 0$ avec $V_0 > E$ donc on n'a pas un OH. La solution est de la forme $\underline{\phi}_{II}(x) = A_{II} e^{qx} + B_{II} e^{-qx}$.

27- Ici le potentiel ne diverge pas donc en tout x , la fonction d'onde et sa dérivée par rapport à x est continue, on a donc:

$$\underline{\phi}_I(x=0) = \underline{\phi}_{II}(x=0) \text{ soit } A_I + B_I = A_{II} + B_{II}.$$

$$\underline{\phi}'_I(x=0) = \underline{\phi}'_{II}(x=0) \text{ soit } ik(A_I - B_I) = q(A_{II} - B_{II}).$$

$$\underline{\phi}_{II}(x=a) = \underline{\phi}_{III}(x=a) \text{ soit } A_{II} e^{qa} + B_{II} e^{-qa} = A_{III} e^{ika}.$$

$$\underline{\phi}'_{II}(x=a) = \underline{\phi}'_{III}(x=a) \text{ soit } q(A_{II} e^{qa} - B_{II} e^{-qa}) = ik A_{III} e^{ika}.$$

On termine la détermination des constantes avec la normalisation soit $\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\psi}(x, t)|^2 dx = 1$ ou encore ici

$$\int_{-\infty}^0 |\underline{\phi}_I(x)|^2 dx + \int_0^a |\underline{\phi}_{II}(x)|^2 dx + \int_a^{+\infty} |\underline{\phi}_{III}(x)|^2 dx = 1.$$

28- Il est plus facile d'exprimer d'abord le vecteur \vec{j}_{III} :

$$\text{On a } \underline{\psi}_{III} = A_{III} e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})}$$

$$\text{soit } \frac{\partial \underline{\psi}_{III}}{\partial x} = ik \underline{\psi}_{III}$$

$$\text{On a aussi } \underline{\psi}_{III}^* = A_{III} e^{-i(kx - \frac{Et}{\hbar})}$$

$$\text{soit } \frac{\partial \underline{\psi}_{III}^*}{\partial x} = -ik \underline{\psi}_{III}^*$$

$$\text{On en déduit: } \vec{j}_{III} = \frac{i\hbar}{2m} (\underline{\psi}_{III} (-ik \underline{\psi}_{III}^*) - \underline{\psi}_{III}^* (ik \underline{\psi}_{III})) \vec{u}_x$$

$$\vec{j}_{III} = \frac{i\hbar}{m} (-ik \underline{\psi}_{III} \underline{\psi}_{III}^*) \vec{u}_x$$

$$\vec{j}_{III} = \frac{\hbar k}{m} |A_{III}|^2 \vec{u}_x: \text{ le vecteur est dans le sens de déplacement de l'onde et de la particule.}$$

De la même façon, on a $\vec{j}_I = \frac{\hbar k}{m} |A_I|^2 \vec{u}_x - \frac{\hbar k}{m} |B_I|^2 \vec{u}_x$: le terme selon $+\vec{e}_x$ correspond à l'onde incidente et le terme selon $-\vec{e}_x$ correspond à l'onde réfléchie. On a donc $\vec{j}_i = \frac{\hbar k}{m} |A_I|^2 \vec{u}_x$ et $\vec{j}_r = -\frac{\hbar k}{m} |B_I|^2 \vec{u}_x$

On définit les coefficients de réflexion et de transmission par:

$$R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} = \frac{|B_I|^2}{|A_I|^2} \text{ et } T = \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|} = \frac{|A_{III}|^2}{|A_I|^2}.$$

30- La particule α a pour charge $+2e$ et le noyau fils a pour charge $(Z-2)e$. On a donc $K = 2(Z-2)e^2$ (c'est le produit des charges au numérateur de la force répulsive électrique et au numérateur de l'énergie potentielle).

$$\text{On a } V_0 = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 x_0} \text{ et } E = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 x_m}.$$

$$\text{AN: } V_0 = \frac{2.90 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9 \cdot 10^9}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-15}} \approx \frac{10^2 \cdot 10^{-38} \cdot 10^{10}}{10^{-15}} \approx 10^{-11} \text{ J.}$$

$$E = 4 \text{ MeV} = 4,1 \cdot 6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 = 6 \cdot 10^{-13} \text{ J.}$$

$$x_m = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 E} = \frac{2.90 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^{-13}} \approx \frac{100 \cdot 10^{-38} \cdot 10^{10}}{10^{-13}} \approx 10^{-13} \text{ m.}$$

$$\text{Largeur de la barrière: } x_m - x_0 \approx 10^{-13} \text{ m}$$

$$\text{Hauteur de la barrière: } V_0 - E \approx 10^{-11} \text{ J.}$$

II. Correction CCINP TPC 2017

1. La corde de guitare est toujours rectiligne quelque soit la position de la guitare, elle n'est pas déformée par son poids.

2. On a $\vec{T}_d = \|\vec{T}_d\|(\cos \alpha(x + dx, t)\vec{e}_x + \sin \alpha(x + dx, t)\vec{e}_z) \approx \|\vec{T}_d\|(\vec{e}_x + \alpha(x + dx, t)\vec{e}_z)$

On a également $\vec{T}_g = \|\vec{T}_g\|(-\cos \alpha(x, t)\vec{e}_x - \sin \alpha(x, t)\vec{e}_z) \approx \|\vec{T}_g\|(-\vec{e}_x - \alpha(x, t)\vec{e}_z)$.

On écrit le PFD au bout de corde de masse $dm = \mu dx$ compris entre x et $x + dx$:

$$\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \vec{e}_z = \vec{T}_d + \vec{T}_g.$$

On projette sur Ox : $0 = -\|\vec{T}_g\| + \|\vec{T}_d\|$, on en déduit donc $\|\vec{T}_g\| = \|\vec{T}_d\| = T_0$.

3. On projette selon Oz : $\mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t))T_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx T_0$.

Or entre x et $x + dx$, dans le petit triangle rectangle on peut écrire: $\tan \alpha(x, t) = \frac{z(x + dx, t) - z(x, t)}{dx} \approx$

$$\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

On a donc $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$: c'est une équation de d'Alembert où c représente la célérité des ondes sur la corde

avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$: plus la corde est tendue et peu dense et plus les ondes vont vite.

$$\left[\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}\right] = \left(\frac{kg.m.s^{-2}}{kg.m^{-1}}\right)^{1/2} = m.s^{-1}.$$

4. Il s'agit d'une onde stationnaire car t et x ne sont pas dans le même terme. On choisit ce type d'onde car l'onde se propage dans un milieu de taille finie.

La corde est fixée aux deux extrémités soit $z(x = 0, t) = 0$ et $z(x = L, t) = 0 = Z_n \sin\left(\frac{\omega_n L}{c}\right) \cos(\omega_n t)$ donne $\frac{L\omega_n}{c} = n\pi$ soit $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$.

5. Le fondamental a pour fréquence $f_1 \approx 250 \text{ Hz}$ ce qui correspond à la corde 5 qui émet un Si^2 . Le premier harmonique a pour fréquence $500 \text{ Hz} = 2f_1$ et le suivant $750 \text{ Hz} = 3f_1$.

Le fondamental présente un fuseau, les harmoniques suivants présentent deux puis trois fuseaux.

6. On cherche à calculer la tension de la corde pour cela on a:

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \text{ soit } T_0 = \mu c^2$$

et $c = \lambda_1 f_1$: dans le fondamental, il n'y a qu'un fuseau soit $L = \frac{\lambda_1}{2}$ donc on a $c = 2L f_1$.

Ainsi on en déduit la tension $T_0 = \mu 4L^2 f_1^2$.

L'énoncé donne la masse volumique $\rho = 1140 \text{ kg.m}^{-3}$, on en déduit la masse linéique par $\rho \pi R^2 L = \mu L$ soit $\mu = \rho \pi R^2 = 1140.3, 14.(1, 25.10^{-4})^2 = 3.10^3.10^8 = 3.10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}$.

On a donc $T_0 = 3.10^{-5}.4.0, 6^2.(2, 5.10^2)^2 = 3.4.0, 4.4.10^{-5}.10^4 = 1 \text{ N}$.

7. Dans la zone où le potentiel est nul on a $\phi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi(x) = 0$: c'est un OH de pulsation spatiale

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.$$

La solution est de la forme $\phi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$.

8. La fonction d'onde est continue en $x = O$ et $x = L$. Or à l'extérieur du puits les fonctions d'onde sont nulles car la particule ne peut pas se trouver dans une zone où le potentiel est infini. On a donc $\phi(x = 0) = \phi(x = L) = 0$.

On a $\int_0^L |\phi(x)|^2 dx = 1$: ce qui traduit que la probabilité de trouver la particule dans le puits est égal à 1 soit la particule est bien quelque part dans le puits.

9. On applique les CL: $\phi(x = 0) = 0 = A$ soit $\phi(x) = B \sin(kx)$.

On normalise la fonction d'onde $\int_0^L |\phi(x)|^2 dx = 1 = B^2 \int_0^L \sin^2(kx) dx = B^2 \int_0^L \left(\frac{1 - \cos(2kx)}{2}\right) dx = B^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2kx)}{4k}\right]_0^L = B^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{\sin(2kL)}{4k}\right) = \frac{B^2 L}{2}$ car $\phi(x=L) = B \sin(kL) = 0$. On a donc $B = \sqrt{\frac{2}{L}}$.

10. On applique la condition $\phi(x=L) = B \sin(kL) = 0$ soit $k_n L = n\pi$ ou encore $k_n = \frac{n\pi}{L} = \frac{\sqrt{2mE_n}}{\hbar}$ donc $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.

Par identification avec l'énoncé on a $\alpha = 2$ et $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$.

k et E sont quantifiés à cause du confinement de la particule, donc la fonction d'onde est quantifiée.

Le problème est analogue à l'onde stationnaire sur la corde: il y a deux noeuds de probabilité de présence aux extrémités du puits comme il y a deux noeuds aux extrémités de la corde. On retrouve dans les deux cas la quantification qui vient du confinement de la particule ou de l'onde.

11. Le photon émis lors du passage du niveau $n = 5$ au niveau $n = 2$ a pour énergie $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_5 - E_2 = (5^2 - 2^2)E_1 = 21E_1$. On a donc $\lambda = \frac{hc}{21E_1}$.