DS 9 de physique

Le sujet comprend deux problèmes indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix.

Il est demandé de numéroter les pages, de bien présenter et de justifier tout résultat (loi, schéma, hypothèses...)

I. **Problème I: De la guitare à la diode laser**

Ondes stationnaires le long d'une corde vibrante

On modélise une corde de guitare par une fine corde homogène, inextensible, de masse linéique μ, de longueur L, tendue horizontalement sous la tension T_0. On se place dans le cadre des hypothèses suivantes :

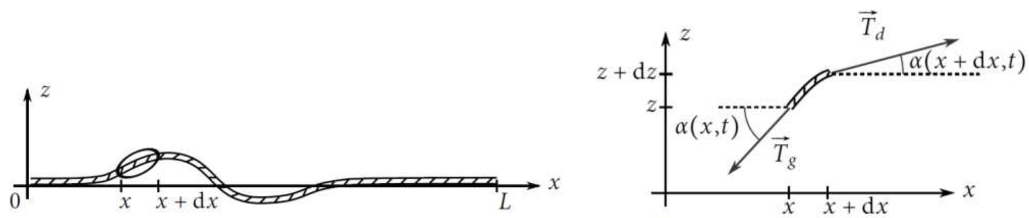
(H1) l'action du champ de pesanteur est négligée

(H2) les phénomènes dissipatifs sont négligés

(H3) le déplacement d'un point matériel de la corde est strictement vertical (l'onde est dite transversale)

(H4) les déformations que fait la corde avec l'horizontale sont suffisamment faibles pour que l'on puisse supposer que l'angle que fait la corde avec l'horizontale est un infiniment petit du premier ordre.

On se place dans un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, on s'intéresse aux forces subies par un tronçon infinitésimal de corde de longueur dx et de masse dm.



(a) Corde complète **(b)** Tronçon infinitésimal de corde

Soit $\overrightarrow{T_g}$ (respectivement $\overrightarrow{T_d}$) la tension exercée par la partie gauche (respectivement droite) de la corde sur le tronçon infinitésimal.

1. Expliquer pourquoi l'observation d'une corde de guitare sur l'instrument permet de valider l'hypothèse (H1).

2. Exprimer les forces de tension $\overrightarrow{T_g}$ et $\overrightarrow{T_d}$ en fonction de α et de leur norme en utilisant (H4). Montrer que $||\overrightarrow{T_g}|| = ||\overrightarrow{T_d}|| = T_0$.

3. Montrer que $z(x,t)$ vérifie une équation de la forme $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (E1).

Comment se nomme cette équation ? Exprimer c en fonction des données, préciser son sens physique et établir son unité dans le SI.

On cherche des solutions de l'équation (E1) sous la forme $z(x,t) = Z_n \sin(\dfrac{\omega_n x}{c}) \cos(\omega_n t)$ où les amplitudes Z_n et les pulsations ω_n sont des constantes du mode n considéré (n entier non nul).

4. Comment se nomme ce type de solution? Justifier le choix.

En précisant les conditions aux limites du problème, établir la quantification des pulsations.

On donne les documents suivants:

Les cordes sont en nylon de masse volumique 1 140 kg.m^{-3}, de mêmes longueurs 63 cm et de diamètres différents reportés dans le tableau ci-dessous :

Corde	1	2	3	4	5	6
Diamètre (mm)	1,07	0,81	0,61	0,41	0,25	0,23

Corde	1	2	3	4	5	6
Note	Mi^1	La^1	Ré^2	Sol^2	Si^2	Mi^3
Fréquence (Hz)	82,40	110,0	146,8	196,0	246,9	329,6

Le son produit par une seule corde de guitare a été enregistré. On donne sur la **figure 2** le spectre (obtenu par décomposition en série de Fourier) du signal proportionnel à l'amplitude de vibration de la corde :

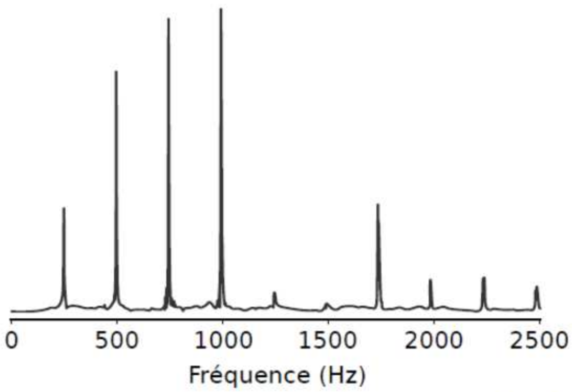


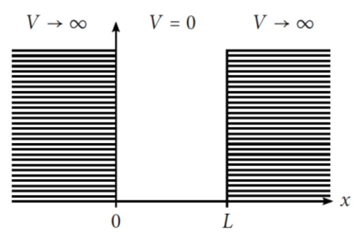
Figure 2 - Spectre du signal électrique proportionnel à l'amplitude de la corde

5. À partir des documents, donner, à un même instant, la représentation graphique de l'allure de la corde pour les 3 modes de plus basse fréquence. Donner le nom de la corde qu a été jouée.

6. Déterminer un ordre de grandeur de la tension de la corde jouée.

Particule quantique dans un puits rectangulaire infini

On modélise, en première approximation, une diode laser par un puits quantique rectangulaire infini de largeur L.



Une particule quantique de masse m et d'énergie E, décrite par la fonction d'onde spatiale $\phi(x)$ et soumise à l'énergie potentielle $V(x)$, satisfait l'équation de Schrödinger des états stationnaires:

$$\phi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\phi(x) = 0$$

La modélisation avec un puits quantique de hauteur infinie nous conduit à décrire l'énergie potentielle de la particule par: $V \to \infty$ si $x < 0$ et $x > L$ et $V = 0$ si $0 \leq x \leq L$.

7. Exprimer en fonction de constantes la fonction d'onde spatiale $\phi(x)$ dans la zone où le potentiel est nul.

8. Que dire de $\phi(x = 0)$? $\phi(x = L)$? et de $\int_0^L |\phi(x)|^2 dx$?

9. En déduire, pour $0 \leq x \leq L$, que la fonction d'onde spatiale s'écrit: $\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x)$.

On donne: $2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$.

10. Montrer que la fonction d'onde spatiale est quantifiée. Quel lien peut être fait avec la corde vibrante?

Établir la quantification de l'énergie de la particule selon l'expression: $E_n = n^a E_1$. Exprimer a et E_1 en fonction des données.

11. Exprimer la longueur d'onde du photon émis lors du passage de la particule de l'état $n = 5$ à l'état $n = 2$.

II. Problème II: Radioactivité alpha

18- Une particule quantique (appelée quanton) est localisée sur un axe $(O, \overrightarrow{u_x})$. L'état quantique de cette particule est caractérisée par une fonction d'onde: $\underline{\psi}(x, t)$. Rappeler le postulat de Born donnant la probabilité dP que la particule se trouve dans l'intervalle $[x, x + dx]$ à l'instant t. En déduire la dimension de $\underline{\psi}(x, t)$.

19- Interpréter la propriété $\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{\psi}(x, t)|^2 dx = 1$.