❏ **20** — Quelle est la signification physique de $\rho = |\underline{\Psi}(x,t)|^2$? En associant la probabilité de présence à un « courant de probabilité » donner sans démonstration l'équation de conservation de la probabilité de présence. On fera apparaître un vecteur $\vec{j}$ appelé vecteur densité de courant de probabilité. Une analyse non demandée montre que dans le cas mono-dimensionnel

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\underline{\Psi}\frac{\partial\overline{\underline{\Psi}}}{\partial x} - \overline{\underline{\Psi}}\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial x}\right)\widehat{u}_x \tag{1}$$

Lorsque la particule possède une énergie potentielle $V(x)$, la fonction $\underline{\Psi}(x,t)$ est solution de l'équation de Schrödinger non relativiste

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\underline{\Psi}(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\underline{\Psi}(x,t) = i\hbar\frac{\partial\underline{\Psi}(x,t)}{\partial t}$$

avec $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1{,}05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$.

❏ **21** — Rappeler ce qu'on entend par particule non relativiste. On cherche des états d'énergie stationnaire $\mathcal{E}$ de la forme $\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\varphi}(x) \times \underline{f}(t)$. Déterminer l'équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par $\underline{\varphi}(x)$ et la forme générale de $\underline{\Psi}(x,t)$ en fonction notamment de $\underline{\varphi}(x)$ et $\mathcal{E}$. Que peut-on dire de la probabilité de présence dP ? On admet pour la suite que $\underline{\Psi}(x,t) = \underline{\varphi}(x)e^{-\frac{i\mathcal{E}t}{\hbar}}$

On définit une particule libre comme une particule de masse m, d'impulsion $\vec{p}$ et d'énergie $\mathcal{E} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} > 0$ évoluant dans une région d'énergie potentielle $V(x)$ nulle.

❏ **22** — Déterminer la solution générale de l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour une particule libre. Montrer que sa fonction d'onde $\underline{\Psi}(x,t)$ est la somme de deux ondes planes se propageant en sens inverse.

❏ **23** — Définir le vecteur d'onde $\vec{k}$ que l'on peut associer à cette particule. Déterminer la relation entre $\vec{p}$ et $\vec{k}$. Comment s'appelle cette relation ?

II.B. — Effet tunnel

Le quanton d'énergie $\mathcal{E}$ arrive d'une région $\boxed{\text{I}}$ définie par $x < 0$ et dans laquelle son énergie potentielle est $V(x) = 0$. Il est susceptible également de se trouver soit dans une région $\boxed{\text{II}}$ telle que $0 < x < a$ où règne une énergie potentielle $V(x) = V_0$ ou bien dans une région $\boxed{\text{III}}$ définie par $x > a$, dans laquelle $V(x) = 0$. On supposera que $0 < \mathcal{E} < V_0$ et l'on cherche des états stationnaires d'énergie $\mathcal{E}$.

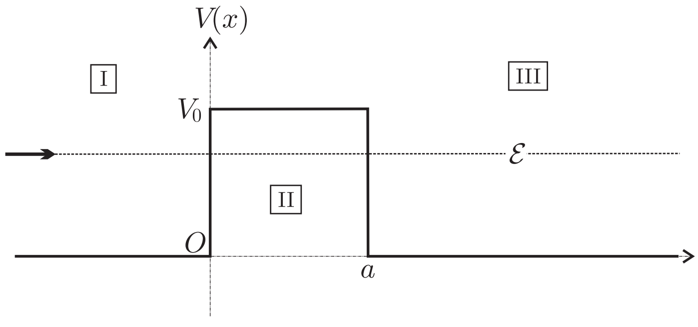

FIGURE 4 – Marche d'énergie potentielle

❏ **24** — Rappeler brièvement ce que serait le comportement de ce quanton s'il était régi par la mécanique classique.

❏ **25** — Déterminer la forme générale de la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans la région $\boxed{\text{I}}$ et $\boxed{\text{III}}$. On ne cherchera pas à déterminer les 2 constantes d'intégration qui apparaissent dans la région $\boxed{\text{I}}$ ni celle qui apparaît dans la région $\boxed{\text{III}}$.

❏ **26** — Déterminer la forme générale de la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans la région $\boxed{\text{II}}$. On posera $q = \sqrt{\frac{2m(V_0-\mathcal{E})}{\hbar^2}}$. Cette solution fait apparaître 2 constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

❏ **27** — Énoncer les propriétés générales de la fonction d'onde en $x = 0$ et $x = a$ permettant d'écrire un système de 4 équations dont les 5 inconnues sont les constantes d'intégration des questions 25 et 26. *On ne cherchera pas à résoudre ce système.* Quelle dernière hypothèse permet de définir complètement la fonction d'onde en tout point x ?

❏ **28** — En utilisant l'équation (1) déterminer les courants de probabilité dans les régions $\boxed{\text{I}}$ et $\boxed{\text{III}}$ en fonction des constantes d'intégrations de la question 25. Comment peut-on interpréter ces deux courants ? En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T caractérisant cette barrière d'énergie potentielle en fonction de ces mêmes constantes.

Un calcul non demandé permet d'obtenir

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4\mathcal{E}(V_0 - \mathcal{E})}\mathrm{sh}^2\,(qa)}$$

II.C. — Radioactivité α

La radioactivité α est l'émission de noyaux d'hélium 4, appelés particules α, par des noyaux atomiques lourds (généralement tels que $Z > 82$), selon la réaction

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{4}_{2}\,He + {}^{A-4}_{Z-2}\,Y$$

dans laquelle A représente le nombre de nucléons (protons et neutrons) et Z le nombre de protons du noyau X. George Gamow fut le premier en 1928 à interpréter la radioactivité α grâce à l'effet tunnel. Il considéra que le noyau X était constitué au préalable de la particule α et du noyau Y. L'énergie potentielle $V(x)$ d'interaction entre ces deux particules est une fonction de la distance x qui les sépare dont l'allure est représentée sur la figure 5.

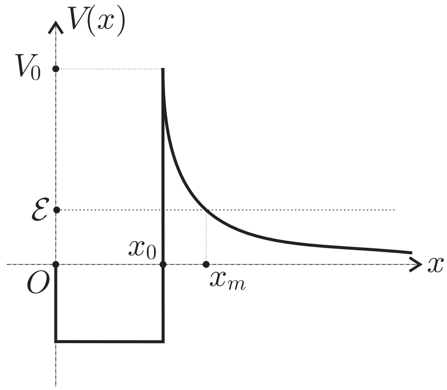

FIGURE 5 – Allure de l'énergie de potentielle

— pour des grandes valeurs de x, cette énergie potentielle correspond à la répulsion électrostatique, et présente donc un profil coulombien de la forme $\frac{K}{4\pi\epsilon_0 x}$

— pour $x < x_0$, les interactions nucléaires attractives interviennent et l'énergie potentielle est un puits très profond.

— pour l'uranium 238 : $Z = 92$ et $x_0 = 3{,}50 \times 10^{-15}$ m. La mesure de l'énergie $\mathcal{E}$ des particules α émises par ce noyau donne une valeur proche de 4,00 MeV.

❏ **30** — Déterminer l'expression de la constante K en fonction de Z et de la charge élémentaire $e = 1{,}61 \times 10^{-19}$ C. En déduire la hauteur V_0 de la barrière d'énergie potentielle à franchir. Calculer la distance x_m à laquelle l'énergie potentielle coulombienne est égale à $\mathcal{E}$. Donner un ordre de grandeur de la largeur et de la hauteur de la barrière de potentiel à franchir. On donne la masse de la particule α, $m_\alpha = 6{,}64 \times 10^{-27}$ kg et on rappelle que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}98 \times 10^9$ SI.