Modélisation

I. **Euler à 1D**

La méthode d'Euler sert à résoudre des équations différentielles non linéaires.

Le principe consiste à trouver l'expression de l'accélération avec le PFD ou l'expression de $\ddot{\theta}$ avec le théorème du moment cinétique.

On intègre $a(t)$ (ou $\ddot{\theta}(t)$) en utilisant les DL suivants:

$v(t+dt) = v(t) + a(t)dt$ et $z(t+dt) = z(t) + v(t)dt$

Quand on discrétise le temps avec un pas de temps dt, on obtient des relations de récurrence:

$v[i+1] = v[i] + a[i]dt$ et $z[i+1] = z[i] + v[i]dt$

On complète des listes ou on remplit des vecteurs avec ces relations de récurrence.

Exemple : un point matériel M de masse m se déplace sur l'axe Oz vertical ascendant subit son poids et la force de frottements de norme mkv^2. A l'instant initial M se trouve en $z = h$ sans vitesse initiale. Déterminer $z(t)$ et $v(t)$ entre les instants $t = 0$ et $t = t1$

Question 1: exprimer $\dfrac{dv}{dt}$ en fonction des données et de la vitesse.

$m\overrightarrow{a} = -mg\overrightarrow{e_z} + mkv^2\overrightarrow{e_z}$ (la force de frottements s'oppose au mouvement, ici le point matériel descend donc la force est vers le haut soit selon $+Oz$).

En projection sur Oz on a: $\dfrac{dv}{dt} = -g + kv^2$

Question 2: exprimer $v(t+dt)$ en fonction de $v(t)$, $a(t)$ et dt, exprimer de même $z(t+dt)$ en fonction de $z(t)$, dt et $v(t)$ pour dt petit.

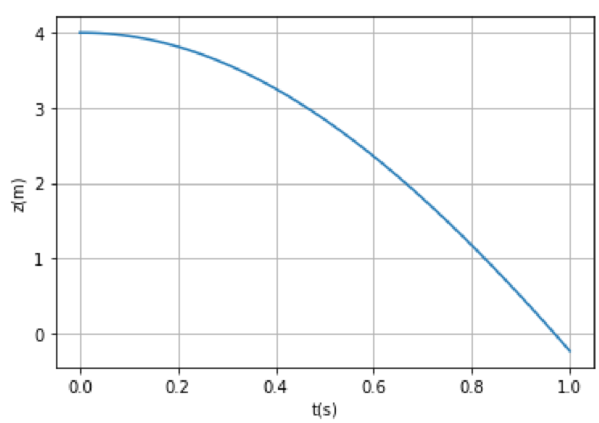
On utilise les DL à l'ordre 1 en dt:

$v(t+dt) = v(t) + \dfrac{dv}{dt}dt = v(t) + a(t)dt$ et $z(t+dt) = z(t) + \dfrac{dz}{dt}dt = z(t) + v(t)dt$.

Question 3: on discrétise le temps, on note dt le pas de temps et $t_i = idt$. On note lt: la liste des temps entre $t = 0$ et $t = t_1$, lv: la liste des vitesses aux instants t_i et lz: la liste des positions de M aux instants t_i. On donne le code dont l'exécution donne la courbe suivante.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

g,k,dt,h=9.8,0.1,...,....
lt=[...]
lv=[...]
lz=[...]
for i in range(100):
    a=-g+k*lv[i]**2
    lt.append(lt[i]+dt)
    lv.append(lv[i]+a*dt)
    lz.append(...........)
plt.plot(....,.....)
plt.grid()
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('z(m)')
plt.show()
```



Compléter le code.

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 g,k,dt,h=9.8,0.1,0.01,4
5 lt=[0]
6 lv=[0]
7 lz=[h]
8 for i in range(100):
9     a=-g+k*lv[i]**2
10     lt.append(lt[i]+dt)
11     lv.append(lv[i]+a*dt)
12     lz.append(lz[i]+lv[i]*dt)
13 plt.plot(lt,lz)
14 plt.grid()
15 plt.xlabel('t(s)')
16 plt.ylabel('z(m)')
17 plt.show()
```

Le temps t en abscisse est compris entre $t = 0\ s$ et $t_1 = 1\ s$. Le pas de temps est dt et on fait N itérations dans la boucle donc le temps final est de la forme $t_1 = Ndt$ donc $dt = \dfrac{t_1}{N} = 0,01\ s$.

Les lignes 5,6,7 permettent d'initialiser les listes temps, vitesse et position. On complète ses lignes avec les CI de l'énoncé: $z(t=0) = h$ et $v(t=0) = 0$.

Ligne 11, on reconnait la relation de récurrence qui permet de calculer $v(t_i + dt)$ soit: $v(t_i + dt) = v(t_i) + adt$ où a désigne l'accélération. On complète la ligne 9 en utilisant l'expression de l'accélération obtenue avec le PFD.

Ligne 12, on complète la liste des positions avec la relation de récurrence $z(t_i + dt) = z(t_i) + v(t_i)dt$.

Le graphe donne z en ordonnées et t en abscisse, on complète la ligne 13.

II. Euler à 2D

La méthode d'Euler avec des tableaux à 2D (matrice) sert à résoudre des équations différentielles à deux variables, l'exemple le plus courant est la résolution d'une équation de diffusion.

Exemple: la résolution de l'équation de diffusion thermique $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Question 1: Exprimer le DL à l'ordre 2 en dx de $T(x+dx,t)$ et de $T(x-dx,t)$. En déduire l'expression de $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ en fonction de $T(x,t)$, dx, $T(x+dx,t)$ et $T(x-dx,t)$.

On a:

$$T(x+dx,t) = T(x,t) + dx\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{dx^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x-dx,t) = T(x,t) - dx\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{dx^2}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On fait la somme de ces deux équations pour éliminer le terme $\dfrac{\partial T}{\partial x}$:

$$T(x+dx,t) + T(x-dx,t) = 2T(x,t) + dx^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

d'où $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{T(x+dx,t) + T(x-dx,t) - 2T(x,t)}{dx^2}$.

Question 2: exprimer par un DL à l'ordre 1 en dt, $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ en fonction de $T(x,t)$, $T(x,t+dt)$ et dt.

On a $T(x,t+dt) = T(x,t) + dt\dfrac{\partial T}{\partial t}$ d'où $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{T(x,t+dt) - T(x,t)}{dt}$.

Question 3: montrer que l'on a $T(x,t+dt) = T(x,t) + r(T(x+dx,t) + T(x-dx,t) - 2T(x,t))$. Exprimer r en fonction de dt, dx et D.

On remplace les expressions de $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ et de $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ obtenues précédemment, dans l'équation de diffusion: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ soit $\dfrac{T(x,t+dt) - T(x,t)}{dt} = \dfrac{D}{dx^2}(T(x+dx,t) + T(x-dx,t) - 2T(x,t))$.

On en déduit $T(x,t+dt) = T(x,t) + r(T(x+dx,t) + T(x-dx,t) - 2T(x,t))$ avec $r = \dfrac{Ddt}{dx^2}$.

Question 4: On définit un pas de temps dt et un pas d'espace dx et une matrice température telle que $T[i,j] = T(x_i, t_j) = T(x = idx, t = jdt)$ (température sur la ligne i et la colonne j). Ecrire la relation de récurrence donnant $T[i, j+1]$ en fonction de $T[i,j]$, $T[i+1,j]$ et $T[i-1,j]$.

On a $T(x,t) = T[i,j]$, $T(x+dx,t) = T[i+1,j]$, $T(x-dx,t) = T[i-1,j]$ et $T(x,t+dt) = T[i,j+1]$. La relation précédente devient:

$T[i,j+1] = T[i,j] + r(T[i+1,j] + T[i-1,j] - 2T[i,j])$.

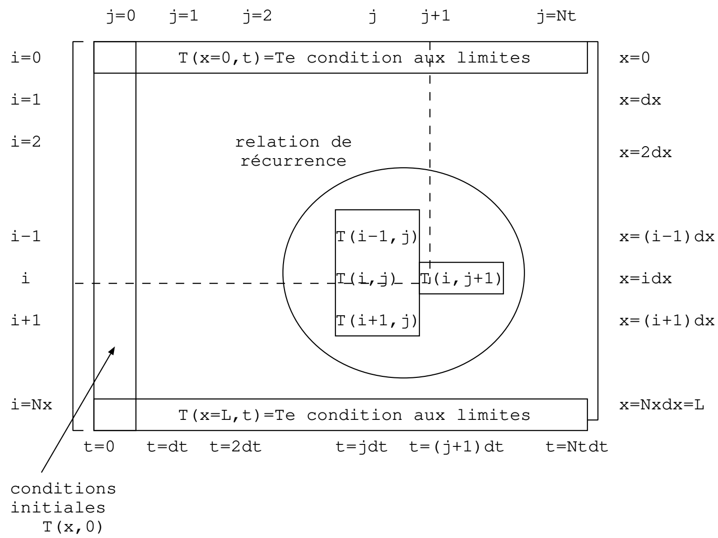
Question 5: expliquer à quoi correspond la première colonne du tableau T? la première et la dernière lignes de T? et comment on utilise la relation de récurrence pour remplir le tableau des températures T?

La première colonne comprend les termes de la forme $T[i,0]$ soit $T(x, t=0)$: cela correspond aux conditions initiales données par l'énoncé.

La première ligne comprend les termes de la forme $T[0,j]$ soit $T(x=0,t)$: cela correspond aux conditions aux limites en $x=0$ données par l'énoncé.

La première dernière ligne les termes de la forme $T[N,j]$ soit $T(x = Ndx, t)$: cela correspond aux conditions aux limites en $x = Ndx$ données par l'énoncé.

La relation de récurrence permet à partir des CI et des CL de remplir le tableau colonne par colonne: colonne pour $j=1$, puis $j=2$...



Question 6: on donne le code python suivant qui étudie la température au cours du temps dans un barreau de longueur L: déduire du code la valeur numérique de la longueur L du barreau, la valeur numérique de la durée t_f d'étude, les conditions initiales $T(x, t=0)$ et les conditions aux limites $T(x=0,t)$ et $T(x=L,t)$ dans le barreau de longueur L. Compléter la ligne 28, que représente a ligne 30? b ligne 33? quel graphe trace-t-on ligne 31? ligne 34?

```
19 dt,dx,Nt,Nx=1,0.05,1000,20
20 D=2
21 r=dt*D/dx**2
22 T=np.zeros((Nx+1,Nt+1))
23 T[0,:]=20
24 T[Nx,:]=60
25 T[:,0]=20
26 for j in range(0,Nt-1):
27     for i in range(1,Nx-1):
28             T[i,j+1]=.......
29
30 a=np.linspace(0,Nt*dt,Nt+1)
31 plt.plot(a,T[10,:])
32
33 b=np.linspace(0,Nx*dx,Nx+1)
34 plt.plot(b,T[:,100])
```

On donne pour la syntaxe:

$T[i,j]$: désigne l'élément de la ligne i et de la colonne j

$T[i,:]$: désigne tous les éléments de la ligne i

$T[:,j]$: désigne tous les éléments de la colonne j

L'espace est échantillonné par pas $dx = 0,05\ m$ avec Nx qui vaut 20: on a donc $x_i = idx$ avec i variant de 0 à 20 soit $L = Nxdx = 20.0,05 = 1\ m$.

Le temps est échantillonné par pas $dt = 1\ s$ avec Nt qui vaut 1000: on a $t_j = jdt$ avec j variant de 0 à Nt soit $t_f = Ntdt = 1.1000 = 1000\ s$.

On lit ligne 23 les valeurs de la température pour $i=0$ soit $x=0$: c'est la première ligne qui correspond à $T(x=0,t) = 20^0C$: condition aux limites en $x=0$.

On lit ligne 24 les valeurs de la température pour $i = Nx$ soit $x = Nxdx = L$: c'est la dernière ligne du tableau qui correspond à $T(x = L, t) = 60^0C$: condition aux limites en $x = L$.

On lit ligne 25 les valeurs de la température pour $j = 0$ soit $t = 0$: c'est la première colonne qui correspond à $T(x, t = 0) = 20^0C$: conditions initiales.

Ligne 30, a désigne une liste des temps de $t = 0$ à $t_f = Ntdt$. Le graphe ligne 31 trace en abscisse le temps et en ordonnée $T[10, :]$ soit la température pour $i = 10$ soit pour $x = idx = 10.0,05 = 0,5\ m$.

Ligne 33, b désigne une liste des x de $x = 0$ à $x = Nxdx = L$. Le graphe ligne 34 trace en abscisse l'abscisse x et en ordonnée $T[1 :, 100]$ soit la température pour $j = 100$ soit pour $t = jdt = 100.1 = 100\ s$.

Ligne 28: on rentre la relation de récurrence trouvée question 4:

$T[i, j + 1] = T[i, j] + r * (T[i + 1, j] + T[i - 1, j] - 2 * T[i, j])$