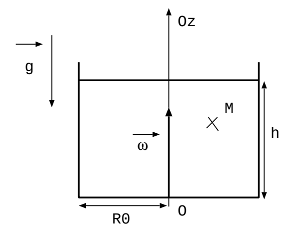
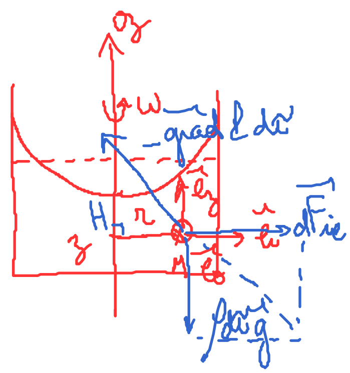
I. Liquide dans un récipient en rotation

Un récipient cylindrique de rayon R_0 est rempli d'eau sur une hauteur h lorsqu'il est au repos dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On note ρ la masse volumique de l'eau. Ce cylindre est mis en rotation autour de son axe de symétrie Oz à la vitesse angulaire constante ω. On cherche à décrire l'allure de la surface libre du fluide.



On note $\mathcal{R}(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, le référentiel fixe lié au sol et supposé galiléen. On note $\mathcal{R}'(O, \vec{e_x'}, \vec{e_y'}, \vec{e_z})$, le référentiel mobile lié au cylindre.

1)



2) R' est en rotation dans R $\Rightarrow$ R' non galiléen

La particule fluide de volume $d\tau$ de masse $dm = \rho\, d\tau$ est à l'équilibre dans R'

$$\vec{0} = \rho \vec{g}\, d\tau - \vec{grad}\, P\, d\tau + \underbrace{\rho\, d\tau\, \omega^2 \vec{HM}}_{d\vec{F}_{ie}}$$

H : projeté ⊥ de M sur l'axe de rotation de R' dans R

$\vec{g} = -g\vec{e_z}$ $\qquad$ $\vec{grad}\, P = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} \end{vmatrix}$

$\vec{HM} = r\vec{e_r}$

sur $\vec{e_r}$: $0 = 0 - \dfrac{\partial P}{\partial r} \cancel{d\tau} + \rho \cancel{d\tau} \omega^2 r \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r}$

sur $\vec{e_\theta}$: $0 = 0 - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} d\tau + 0 \Rightarrow$ P ne dépend pas de θ $\qquad$ $P = P(r, z)$

sur $\vec{e_z}$: $0 = -\rho \cancel{d\tau} g - \dfrac{\partial P}{\partial z} \cancel{d\tau} + 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g}$

On part de $\dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r$: on intègre / à r avec $z =$ cste

on dérive / à r avec z cste

la cste d'intégration peut dépendre de z

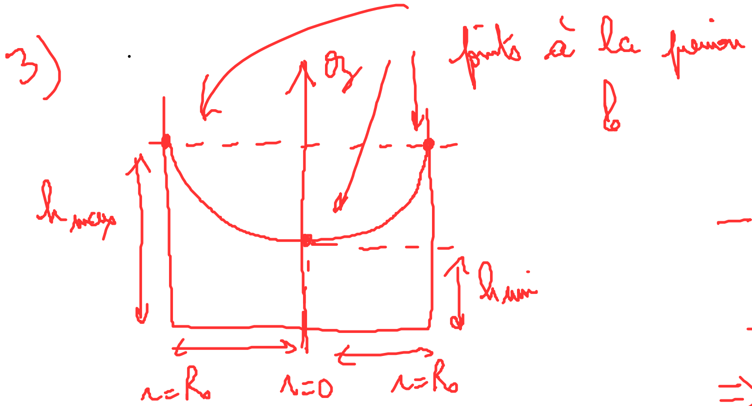
$$P(r, z) = \rho\omega^2 \frac{r^2}{2} + f(z)$$

Or $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$ et $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\cancel{\rho\omega^2 \dfrac{r^2}{2}} + f(z)\right] = f'(z) = -\rho g$

donc $f(z) = -\rho g z + A$ ← une vraie cste car $f(z)$ ne dépend pas de r

d'où $\boxed{P(r, z) = \rho\omega^2 \dfrac{r^2}{2} - \rho g z + A}$

3)



$$P(r=0, z=h_{min}) = P_0 = -\rho g h_{min} + A$$

$$-\quad P(r=R_0, z=h_{max}) = P_0 = \frac{\rho \omega^2 R_0^2}{2} - \rho g h_{max} + A$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\rho g h_{min} - \rho \frac{\omega^2 R_0^2}{2} + \rho g h_{max}$$

$$\boxed{h_{max} - h_{min} = \frac{\cancel{\rho}\,\omega^2 R_0^2}{2\cancel{\rho} g}}$$