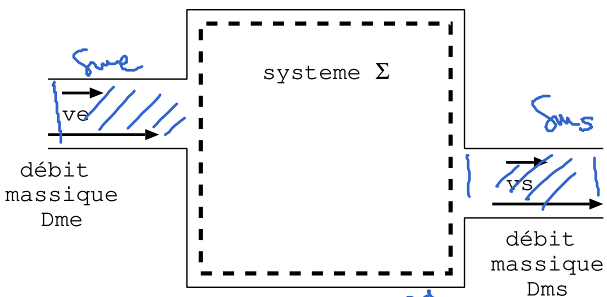
Chapitre MF5 : bilans macroscopiques

On étudie dans ce chapitre des fluides en écoulement qui traversent une turbine, une pompe, un coude,... L'objectif est de savoir réaliser un bilan de masse, un bilan de quantité de mouvement et un bilan d'énergie cinétique à ces systèmes.

Ventilateur | turbine | lance à incendie

.

Les notations pour décrire ces dispositifs:



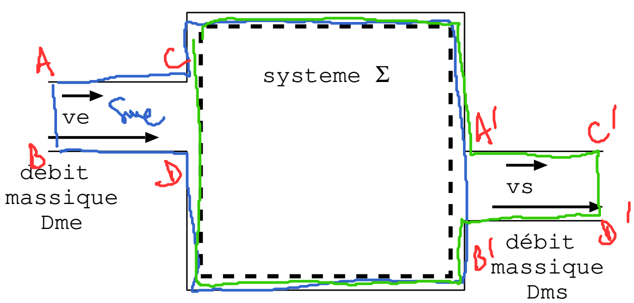
On note Σ' le système ouvert délimité par des parois fixes.

$\delta m_e = D_{me}\,dt$ est la masse qui entre dans le système entre t et $t+dt$.

$\delta m_s = D_{ms}\,dt$ est la masse qui sort du système entre t et $t+dt$.

⚠ On est en régime stationnaire : $\vec{P}_{\Sigma'}$, $Ec_{\Sigma'}$, $Ep_{\Sigma'}$, $m_{\Sigma'}$ ne dépendent pas du temps

On peut aussi faire appel à un système fermé pour décrire ces dispositifs.



On définit le système fermé Σ^* composé de :

Σ' et δm_e à l'instant t

Σ' et δm_s à l'instant $t+dt$

Σ^* est un système fermé et mobile.

Remarque: Le système fermé et mobile Σ^* peut aussi se définir comme en thermodynamique industriel:

Σ^* est compris entre AB et A'B' à l'instant t

CD et C'D' " $t+dt$

I. Bilan de masse

On peut réaliser un bilan de masse sur le système fermé ou sur le système ouvert précédemment définis.

1. Bilan de masse sur le système ouvert

En régime stationnaire la masse du système ouvert Σ' est constante donc la masse qui entre est égale à la masse qui sort de Σ' soit : $\delta m_e = \delta m_s$

$D_{me} = D_{ms} = D_m$ le débit massique est conservé

2. Bilan de masse sur le système fermé

$$m_{\Sigma^*}(t) = m_{\Sigma^*}(t+dt)$$

$$\cancel{m_\Sigma} + \delta m_e = \cancel{m_\Sigma} + \delta m_s$$

soit $\delta m_e = \delta m_s = \delta m$

Dans toute la suite on écrira.

$$\boxed{\delta m_e = \delta m_s = D_m\, dt} \quad B$$

II. Bilan de quantité de mouvement

La loi de la quantité de mouvement s'écrit: $\boxed{\dfrac{d\vec{p}_{\Sigma^*}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$

Cette loi ne s'applique qu'au système fermé Σ^*.

à démontrer à chaque fois

avec $\vec{p}_{\Sigma^*}(t) = \vec{p}_\Sigma + \delta m_e \vec{v}_e = \vec{p}_\Sigma + D_m\, dt\, \vec{v}_e$

avec $\vec{p}_{\Sigma^*}(t+dt) = \vec{p}_\Sigma + \delta m_s \vec{v}_s = \vec{p}_\Sigma + D_m\, dt\, \vec{v}_s$

On a donc $d\vec{p}_{\Sigma^*} = \vec{p}_{\Sigma^*}(t+dt) - \vec{p}_{\Sigma^*}(t) = D_m\, dt\,(\vec{v}_s - \vec{v}_e)$

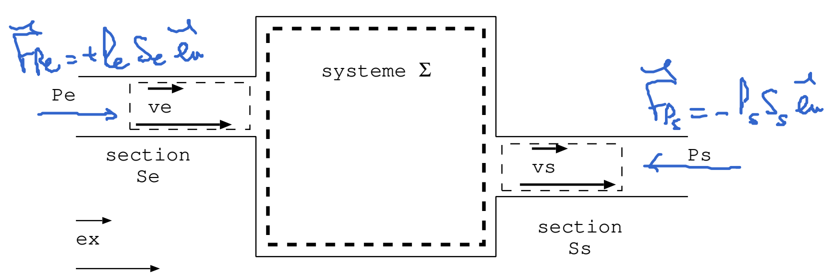
d'où $\dfrac{d\vec{p}_{\Sigma^*}}{dt} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e) = \sum \vec{F}_{ext}$

Quelles sont les forces extérieures exercées sur le système Σ^*?

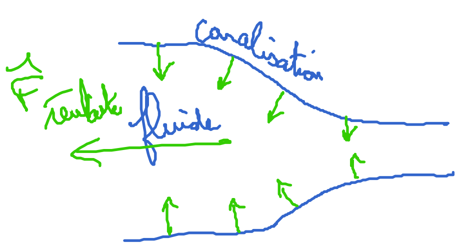
Le poids est très souvent négligé.

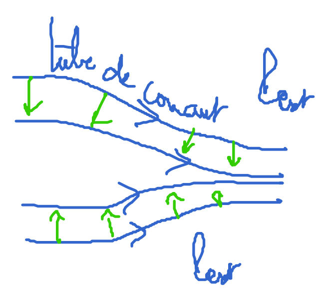
Le réflexe à avoir est de chercher les forces exercées "à droite", "à gauche", "dedans" et "sur la surface latérale du système".

- à droite du système: force de pression
  $\vec{F}_{P_e} = +P_e S_e \vec{e}_x$
- à gauche du système: force de pression
  $\vec{F}_{P_s} = -P_s S_s \vec{e}_x$
- à l'intérieur: force d'une hélice, ...



- sur la surface latérale: on distingue deux situations: le système est délimité par une canalisation ou le système est délimité par des lignes de courant:





fluide parfait: les forces de la canalisation sur le fluide sont ⊥ à la surface en tout point

les forces latérales sont des forces de pression

Attention: dans certains exercices on demande d'exprimer la force exercée par le fluide sur une hélice ou par le fluide sur la canalisation. Comment s'y prend-on?

On trouve $\vec{F}_{canalisation/fluide}$ ou $\vec{F}_{hélice/fluide}$ grâce à la loi de la quantité de mouvement

Par principe de l'action et de la réaction : $\vec{F}_{fluide/canalisation} = -\vec{F}_{canalisation/fluide}$

III. Bilan d'énergie cinétique ou d'énergie mécanique

1. *Cas où l'on ne tient pas compte de la pesanteur*

On applique le théorème de la puissance cinétique au système fermé Σ^*. Il s'écrit:

$$\frac{dE_{c\Sigma^*}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}) + \mathcal{P}(\vec{F}_{int})$$

à démontrer à chaque fois

avec $E_{c,\Sigma^*}(t) = E_{c\Sigma} + \delta m_e \frac{v_e^2}{2} = E_{c\Sigma} + D_m dt \frac{v_e^2}{2}$

avec $E_{c,\Sigma^*}(t+dt) = E_{c\Sigma} + \delta m_s \frac{v_s^2}{2} = E_{c\Sigma} + D_m dt \frac{v_s^2}{2}$

On a donc $dE_{c,\Sigma^*} = E_{c\Sigma^*}(t+dt) - E_{c\Sigma^*}(t) = D_m dt \left(\frac{v_s^2 - v_e^2}{2}\right)$

$$\text{d'où } \frac{dE_{c\Sigma^*}}{dt} = D_m \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} = \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}) + \underbrace{\mathcal{P}(\vec{F}_{int})}_{=0}$$ pour un fluide parfait

avec la puissance des forces intérieures nulle pour un fluide parfait

2. *Cas où l'on tient compte de la pesanteur*

On applique le théorème de la puissance mécanique au système fermé Σ^*. Il s'écrit:

$$\frac{dE_{m}\Sigma^*}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}) + \underbrace{\mathcal{P}(\vec{F}_{int})}_{0}$$ pour un fluide parfait

$\vec{F}_{ext}$ autres que le poids qui est compté dans $E_{m\Sigma}$

à démontrer à chaque fois

avec $E_{m,\Sigma^*}(t) = E_{m\Sigma} + \delta m_e \frac{v_e^2}{2} + \delta m_e g z_e = E_{m\Sigma} + D_m dt \frac{v_e^2}{2} + D_m dt\, g z_e$

avec $E_{m,\Sigma^*}(t+dt) = E_{m\Sigma} + \delta m_s \frac{v_s^2}{2} + \delta m_s g z_s = E_{m\Sigma} + D_m dt \frac{v_s^2}{2} + D_m dt\, g z_s$

On a donc $dE_{m,\Sigma^*} = E_{m\Sigma^*}(t+dt) - E_{m\Sigma^*}(t) = D_m dt \left(\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g z_s - g z_e\right)$

$$\text{D} \quad \frac{dE_{m\Sigma^*}}{dt} = D_m \left(\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e)\right) = \mathcal{P}(\vec{F}_{ext}) + \underbrace{\mathcal{P}(\vec{F}_{int})}_{0}$$ pour un fluide parfait

3. *Expression des puissances des forces extérieures*

Le réflexe à avoir est de chercher les forces exercées "à droite", "à gauche", "dedans" et "sur la surface latérale du système".

- à droite du système:

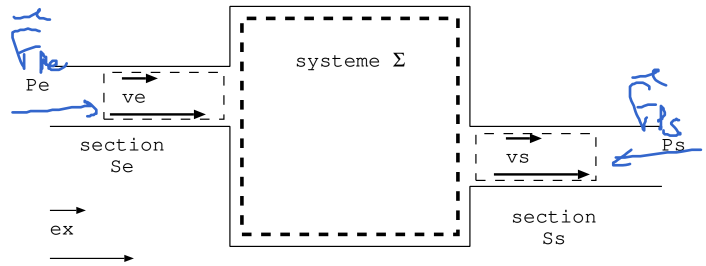
$\mathcal{P}(\vec{F}_{Pe}) = \vec{F}_{Pe} \cdot \vec{V}_e = + P_e S_e V_e = + P_e D_v$

- à gauche du système:

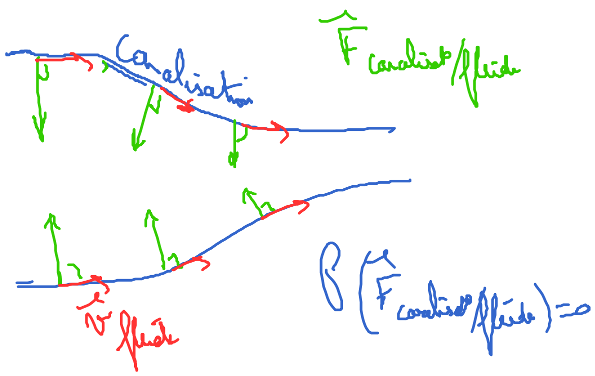
$\mathcal{P}(\vec{F}_{Ps}) = \vec{F}_{Ps} \cdot \vec{V}_s = - P_s S_s V_s = - P_s D_v$

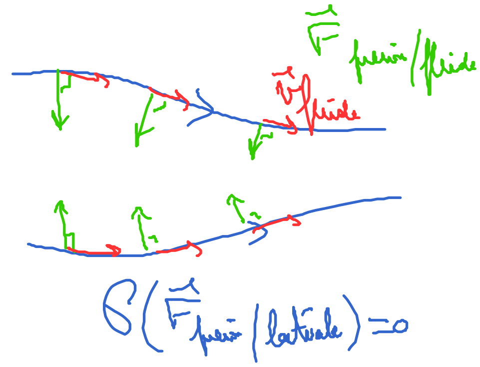
- à l'intérieur:

$\mathcal{P}(\vec{F}_{hélice}) = \vec{F}_{hélice/fluide} \times \vec{v}_{fluide \to l'hélice}$



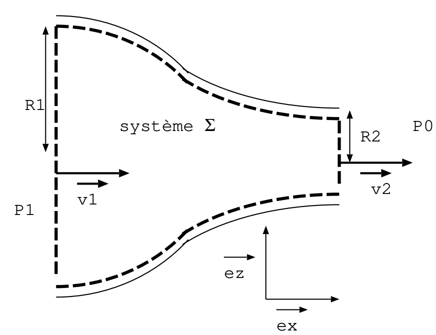
- sur la surface latérale: on distingue deux situations: le système est délimité par une canalisation ou le système est délimité par des lignes de courant:





IV. Force exercée sur un embout

L'embout d'une lance d'incendie a un rayon $R_2 = 5\ cm$. Il est vissé à un tube cylindrique de rayon $R_1 = 10\ cm$. Quand l'embout est ouvert à l'air libre ($P_0 = 10^5\ Pa$), la lance d'incendie a pour débit volumique $D_v = 40\ L.s^{-1}$. Le fluide est parfait, l'écoulement est permanent et incompressible. On néglige la pesanteur.



1. Calculer les vitesses v_1 et v_2.

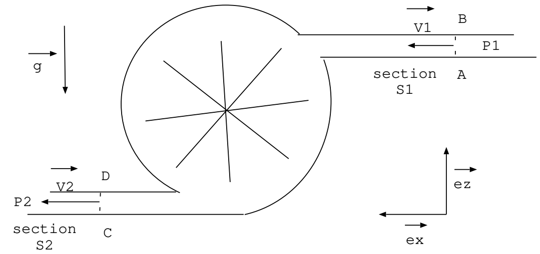
2. Utiliser la relation de Bernoulli pour calculer la pression P_1 en amont de l'écoulement.

3. On considère le système ouvert et fixe Σ. On note δm_e et δm_s les masses de fluide qui entre dans le système Σ et qui en sort entre t et $t + dt$. Définir le système fermé Σ^* à t et à $t + dt$. Déduire de la loi de la quantité de mouvement appliqué à Σ^* la force qu'exerce l'embout sur le fluide et en déduire la force exercée par le fluide sur l'embout.

Réponses : $v_1 = 1,27\ m/s$, $v_2 = 5,1\ m/s$, $P_1 = 1,12.10^5\ Pa$,

$\vec{F}_{embout/fluide} = (P_0 \pi R_2^2 - P_1 \pi R_1^2 + \rho D_v (v_2 - v_1))\vec{e_x}$

V. **Puissance fournie à une turbine**



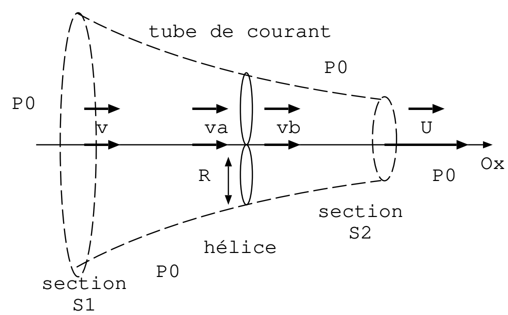
De l'eau circule dans une turbine de 1 vers 2. Les rayons des sections d'entrée et de sortie sont $R_1 = 15\ cm$ et $R_2 = 30\ cm$. Le débit volumique est $D_v = 0,22\ m^3.s^{-1}$ et la dénivellation est $z_1 - z_2 = 1\ m$. Les pressions en 1 et 2 sont $P_1 = 2,5.10^5\ Pa$ et $P_2 = 0,65.10^5\ Pa$. L'eau est un fluide parfait et incompressible.

On considère le système ouvert et fixe Σ compris entre AB et CD. Définir un système fermé contenant Σ^* et déduire du théorème de la puissance mécanique appliqué à Σ^* la puissance fournie par l'hélice au fluide.

Réponse : $P = \frac{\rho}{2}D_v(v_2^2 - v_1^2) + \rho D_v g(z_2 - z_1) + D_v(P_2 - P_1)$

VI. **Débit d'un ventilateur**

Un ventilateur dont les pales ont pour rayon $R = 0,25\ m$, consomme une puissance électrique $\mathcal{P}_{el} = 140\ W$. On souhaite déterminer le débit volumique D_v du courant d'air qu'il produit. La masse volumique de l'air est $\rho = 1,2\ kg.m^{-3}$.



Hypothèses : l'écoulement d'air induit par l'hélice est unidimensionnel, parfait et incompressible, les efforts de pesanteur sont négligeables, le tube de courant est de révolution autour de l'axe de l'hélice et sa section a pour aire, au niveau de l'hélice, celle du disque balayée par l'hélice. Pour un écoulement parfait et incompressible la puissance des efforts intérieurs est nulle. Loin en amont et en aval de l'hélice l'écoulement est uniforme et la vitesse v en amont est négligeable devant la vitesse U en aval. La pression est uniforme et vaut P_0, la pression atmosphérique.

1. Justifier l'allure du tube de courant porté sur le schéma précédent.

2. Montrer que les vitesses v_a et v_b sont égales et les exprimer en fonction de D_v et R.

3. On définit le système ouvert et fixe Σ compris entre les surfaces S_1 et S_2 représentées sur le schéma. Définir un système fermé et mobile Σ^*. Déduire du théorème de la puissance cinétique appliquée à Σ^* que la puissance de l'hélice s'écrit $\mathcal{P}_{el} = \frac{\rho D_v U^2}{2}$. En déduire la force exercée par l'hélice sur le fluide en fonction de ρ, D_v, U et v_a.

4. Déduire d'un bilan de quantité de mouvement appliqué à Σ^*, l'expression de la force qu'exerce l'hélice sur le fluide en fonction de ρ, D_v et U. En déduire la relation entre U et v_a.

5. On suppose que toute la puissance électrique reçue par le ventilateur est donnée à l'hélice. Exprimer P_{el} en fonction de ρ, D_v et R. En déduire l'expression et la valeur numérique du débit volumique.

6. L'application du théorème de Bernoulli entre un point très en amont et un point très en aval conduit à un résultat erroné : expliquer.

Réponse : $U = 2v_a$, $P_{el} = \frac{2\rho D_v^3}{\pi^2 R^4}$

VII. **Force sur un coude**

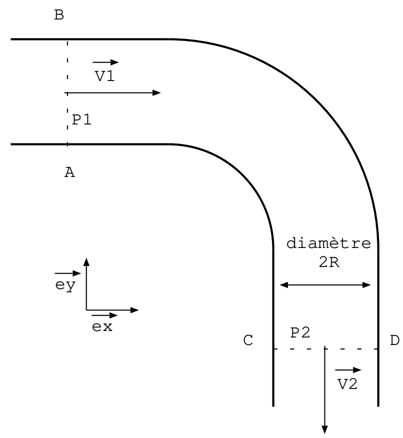
Un fluide parfait et incompressible de masse volumique ρ s'écoule dans une canalisation cylindrique de rayon R présentant un coude. On néglige les effets de pesanteur. On définit le système ouvert noté Σ compris entre les parois fixes AB et CD. On note avec un indice 1 les grandeurs physiques du fluide à l'entrée du coude et avec un indice 2 celles en sortie du coude. On se place en régime stationnaire. On note D_v le débit volumique.

1. Déterminer la relation simple entre v_1 et v_2. En déduire la relation simple entre P_1 et P_2.

2. Définir soigneusement un système fermé Σ^* à partir du système ouvert Σ. On note Σ^* le système fermé. Exprimer la dérivée de la quantité de mouvement de Σ^* par rapport au temps en fonction de ρ, D_v, R et des vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$.

3. Déduire de la loi de la quantité de mouvement, l'expression de la force exercée par le fluide sur le coude en fonction de ρ, D_v, P_1, R et des vecteurs de base $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$.

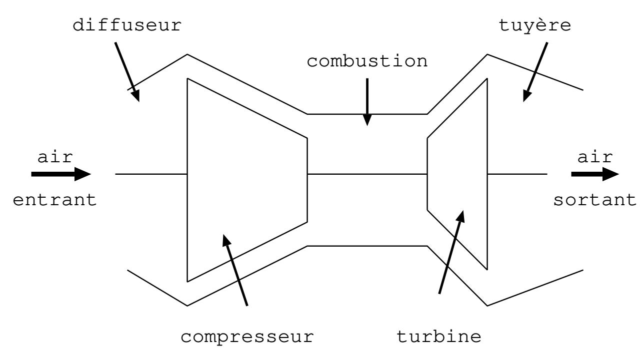
4. Tracer l'allure des lignes de courant dans le coude. Commenter ces lignes pour retrouver la direction et le sens de la force de pression exercée par le fluide sur le coude.



Réponse: $\overrightarrow{F}_{coude/fluide} = -(\frac{\rho D_v^2}{\pi R^2} + P_1 \pi R^2)(\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_x})$

VIII. **Turboréacteur (CCINP PC 2020)**

Dans cette partie on étudie un turboréacteur dit simple flux pour lequel le gaz entrant dans le réacteur passe dans un diffuseur pour en diminuer la vitesse avant d'être comprimé par le compresseur. Le gaz comprimé arrive dans une chambre de combustion où il est chauffé avant d'être détendu partiellement dans la turbine qui fournit la puissance nécessaire au compresseur. En sortie de turbine, le gaz reste à une pression relativement élevée par rapport à la pression extérieure et il est détendu dans une tuyère, ce qui permet de l'accélérer : c'est cette accélération qui permet la propulsion de l'avion.



Le turboréacteur constitue un système ouvert Σ. En régime stationnaire, ce volume de contrôle contient à l'instant t une masse d'air $M(t)$ à laquelle on associe une quantité de mouvement $\overrightarrow{p}(t)$. Pour établir le bilan de quantité de mouvement, on doit définir un système fermé Σ^* qui, à l'instant t, est constitué de $M(t)$ et d'une masse entrante dans la tuyère δm_e à la vitesse $\overrightarrow{v_e}$ et, à l'instant $t + dt$ est constitué de $M(t + dt)$ et d'une masse sortante de la tuyère δm_s à la vitesse $\overrightarrow{v_s}$.

La pression P_0 autour du turboréacteur est uniforme. La surface d'entrée du turboréacteur est notée S_e et celle de sortie S_s.

1. Donner l'expression du vecteur quantité de mouvement du système fermé $\overrightarrow{p^*}(t)$ à l'instant t.

2. Donner l'expression du vecteur quantité de mouvement du système fermé $\overrightarrow{p^*}(t + dt)$ l'instant $t + dt$.

3. Des deux questions précédentes déduire, en régime stationnaire, l'expression de la dérivée du vecteur quantité de mouvement du système fermé $\frac{d\overrightarrow{p^*}(t)}{dt}$ à l'instant t. On introduira D_m débit massique d'air dans le réacteur.

4. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le système.

5. Indiquer quelle(s) approximation(s) est/sont nécessaire(s) pour conclure que la force appliquée par le réacteur à l'air a pour expression : $\overrightarrow{F}_{reacteur \to air} = D_m(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e})$.

6. En considérant un réacteur positionné horizontalement avec son entrée à gauche comme indiqué sur la figure, représenter qualitativement le vecteur de la force exercée par l'air sur le réacteur ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{v_e}$ et $\overrightarrow{v_s}$ dans le référentiel du réacteur. Comparer les normes de v_e et v_s des vecteurs vitesses pour que la force exercée par l'air sur l'avion soit propulsive.

Réponses: 3- $\frac{d\overrightarrow{p^*}}{dt} = D_m(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e})$ *6-* $v_s > v_e$