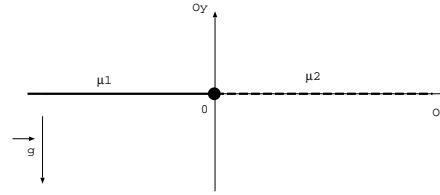


# TD 3 ondes

## I. Deux cordes de masses différentes

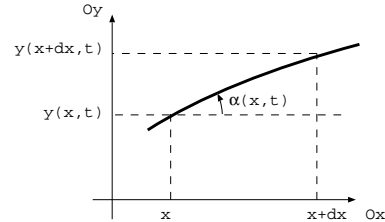
Une corde vibrante très longue et donc considérée comme infinie, est soumise à une tension  $T_0$ . Elle est formée d'une corde de masse linéique  $\mu_1$  pour  $x < 0$  et d'une corde de masse linéique  $\mu_2$  pour  $x > 0$ . Elles sont réunies en  $x = 0$  par un noeud, considéré comme une masse ponctuelle  $M$ .



Les vitesses de propagation des ondes à gauche et à droite du noeud sont notées respectivement  $c_1$  et  $c_2$ . Un générateur d'ondes très loin à gauche (soit en  $x \rightarrow -\infty$ ) génère une OPPH incidente qui se propage selon  $+Ox$  notée  $y_i(x, t)$  de la forme  $y_i(x, t) = y_0 \cos(\omega t - k_1 x)$ . Arrivée sur le noeud, cette onde met celui-ci en mouvement transversal, de même pulsation que l'onde incidente. A son tour, le mouvement du noeud génère une onde réfléchiée notée  $y_r(x, t)$  et une onde transmise notée  $y_t(x, t)$ .

1. Rappeler, sans démonstration, les équations de propagation vérifiées par  $y_i(x, t)$ ,  $y_r(x, t)$  et  $y_t(x, t)$ . Donner les expressions de  $c_1$  et  $c_2$  en fonction des données puis de  $k_1$  et  $k_2$ , les vecteurs d'onde sur la corde 1 et sur la corde 2, en fonction de  $c_1$ ,  $c_2$  et  $\omega$ .
2. On note  $r y_0$  et  $\tau y_0$  les amplitudes respectives des ondes réfléchiées et transmises. Exprimer en notation réelle  $y_r(x, t)$  et  $y_t(x, t)$ .
3. On note  $y(x = 0^-, t)$  et  $y(x = 0^+, t)$ , la hauteur de la corde respectivement juste à gauche et à droite du noeud. Que pensez-vous de ces deux hauteurs? En déduire une première relation entre  $r$  et  $\tau$  (équation (\*)).
- 4.

**4.a.** Soit le système infinitésimal de corde compris au repos entre  $x$  et  $x + dx$ . On note  $y(x, t)$  la hauteur de la corde en  $x$  à l'instant  $t$ . Dans l'approximation des petits angles, exprimer  $\alpha(x, t)$  en fonction d'une dérivée de  $y(x, t)$ .



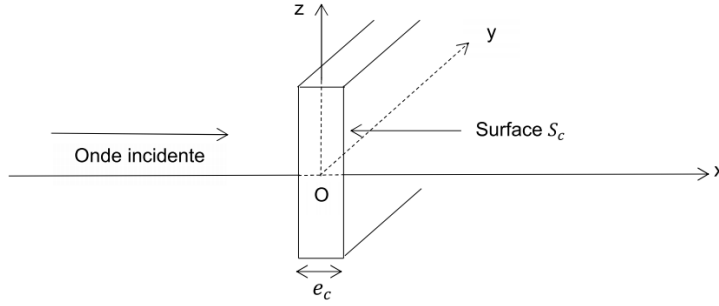
**4.b. Le noeud est supposé sans masse.** Déduire de la RFD appliquée au noeud, l'égalité  $\frac{\partial y}{\partial x}(x = 0^-, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x = 0^+, t)$ . Enfin déduire de cette égalité, une relation entre  $r$ ,  $\tau$ ,  $c_1$  et  $c_2$  (équation (\*\*)).

5. Déduire de la résolution du système composé des équations (\*) et (\*\*), les expressions de  $r$  et  $\tau$  en fonction de  $c_1$  et  $c_2$ . Commenter ces expressions.
6. Dans le cas où  $\mu_1 \ll \mu_2$ , donner les expressions approchées de  $r$  et  $\tau$ . Exprimer les ondes  $y(x < 0, t)$  et  $y(x > 0, t)$ . Commenter le résultat. On donne:  $\cos p - \cos q = -2 \sin(\frac{p+q}{2}) \sin(\frac{p-q}{2})$ .

Réponses: 1-  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$  et  $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$  3-  $1 + r = \tau$  4-  $1 - r = \frac{c_1 \tau}{c_2}$  5-  $r = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$  et  $\tau = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}$  6-  $r = -1$  et  $\tau = 0$  on trouve une OS

## II. Transmission du son à travers une cloison

Une OPPH se propage dans l'air. Cette onde de pulsation  $\omega$  arrive sous incidence normale sur une cloison rigide et non absorbante d'épaisseur  $e_c$ , de surface  $S_c$  et de masse  $M_c$ . L'épaisseur de la cloison est très petite devant la longueur d'onde donc on assimile la cloison à une cloison très fine placée en  $x = 0$ .



Pour l'onde incidente, on note  $p_i(x, t)$  la surpression acoustique et  $v_i(x, t)$  la vitesse particulière. On désigne  $\underline{p}_i(x, t)$  et  $\underline{v}_i(x, t)$  les expressions complexes correspondantes. On note  $k$  la norme du vecteur d'onde,  $p_{im}$  l'amplitude de la surpression de l'onde incidente.

On définit l'impédance acoustique du milieu  $Z$ .

1. Exprimer les ondes complexes  $\underline{p}_i(x, t)$  et  $\underline{v}_i(x, t)$  en fonction de  $k$ ,  $\omega$ ,  $Z$  et  $p_{im}$ .
2. Rappeler la relation entre  $k$ ,  $\omega$  et  $c$ .

Pour l'onde réfléchie, on note  $p_r(x, t)$  la surpression acoustique et  $v_r(x, t)$  la vitesse particulière. On désigne  $\underline{p}_r(x, t)$  et  $\underline{v}_r(x, t)$  les expressions complexes correspondantes. On note  $\underline{p}_{rm}$  l'amplitude de la surpression de l'onde réfléchie.

3. Exprimer les ondes complexes  $\underline{p}_r(x, t)$  et  $\underline{v}_r(x, t)$  en fonction de  $k$ ,  $\omega$ ,  $Z$  et  $\underline{p}_{rm}$ .

Pour l'onde transmise, on note  $p_t(x, t)$  la surpression acoustique et  $v_t(x, t)$  la vitesse particulière. On désigne  $\underline{p}_t(x, t)$  et  $\underline{v}_t(x, t)$  les expressions complexes correspondantes. On note  $\underline{p}_{tm}$  l'amplitude de la surpression de l'onde réfléchie.

4. Exprimer les ondes complexes  $\underline{p}_t(x, t)$  et  $\underline{v}_t(x, t)$  en fonction de  $k$ ,  $\omega$ ,  $Z$  et  $\underline{p}_{tm}$ .

Les surpressions sonores sont à l'origine d'une vibration de la cloison mince. Par le choix d'une bonne origine des temps cette vibration peut être modélisée par son déplacement  $X_c(t) = X_m \cos(\omega t)$  auquel on associe le déplacement complexe  $\underline{X}_c(t)$ .

5. Exprimer en notation complexe la position  $\underline{X}_c(t)$ , la vitesse  $\underline{v}(t)$  et l'accélération de la cloison  $\underline{a}(t)$ .
6. Exprimer en notation complexe, les forces de pression exercées sur la cloison.
7. Dédire du PFD appliqué à cloison une équation reliant  $M_c$ ,  $S_c$ ,  $\omega$ ,  $X_m$ ,  $p_{im}$ ,  $\underline{p}_{rm}$  et  $\underline{p}_{tm}$ . Commenter la relation trouvée dans le cas où  $M_c = 0$ .
8. Utiliser la continuité de la vitesse de la cloison pour trouver une relation entre  $X_m$ ,  $\omega$ ,  $\underline{p}_{tm}$  et  $Z$ .

Utiliser la continuité de la surpression de la cloison pour trouver une relation entre  $p_{im}$ ,  $\underline{p}_{rm}$  et  $\underline{p}_{tm}$ .

Dédire de ces deux relations que  $X_m = \frac{p_{im} - \underline{p}_{rm}}{j\omega Z}$ .

9. On pose  $\omega_0 = \frac{2S_c Z}{M_c}$ . Montrer ainsi que  $\underline{p}_{rm} = \frac{j\omega}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} p_{im}$ .

On définit les coefficients complexes de réflexion  $\underline{r} = \frac{\underline{p}_{rm}}{p_{im}}$  et  $\underline{\tau} = \frac{\underline{p}_{tm}}{p_{im}}$

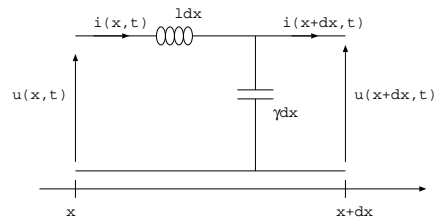
10. Exprimer les coefficients  $\underline{r}$  et  $\underline{\tau}$  en fonction de  $\omega$  et  $\omega_0$ . La cloison se comporte comme un filtre. Préciser la nature de ce filtre.

Réponses: Les ondes sont en  $e^{j(\omega t \pm kx)}$  5-  $\underline{a} = -\omega^2 X_m e^{j\omega t}$  7-  $-\omega^2 M_c X_m = (p_{im} + \underline{p}_{rm} - \underline{p}_{tm}) S_c$  8-  $p_{im} - \underline{p}_{rm} = \underline{p}_{tm} = j\omega Z X_m$ .

### III. Correction: ondes sur deux cordes

### IV. Propagation dans un câble coaxial

Une tranche infinitésimale  $dx$  d'une ligne bifilaire idéale est composée d'une inductance  $l \cdot dx$  et d'une capacité  $\gamma \cdot dx$ .



1. Dédurre de l'application d'une loi des noeuds et d'une loi des mailles que  $u(x, t)$  et  $i(x, t)$  vérifient les équations différentielles  $\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -l \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)$ .

2. Montrer que  $u(x, t)$  et  $i(x, t)$  sont solutions d'une équation de d'Alembert (indication : pour toute fonction  $y(x, t)$  on a  $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial y}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial t})$ ). Quelle est la vitesse de propagation des ondes ? Vérifier l'homogénéité du résultat.

3. Une onde de la forme  $u(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$  se propage dans le câble. En remplaçant  $u(x, t)$  dans l'équation d'onde trouvée précédemment déterminer la relation entre  $k$  et  $\omega$ . Donner l'expression de  $i(x, t)$  en utilisant une des équations obtenues dans la question 1.

On définit l'impédance de la ligne par  $Z = \frac{u(x, t)}{i(x, t)}$  pour l'OPPH<sup>+</sup>. Exprimer  $Z$  en fonction des données.

Comment s'écrit le rapport  $\frac{u(x, t)}{i(x, t)}$  pour une OPPH<sup>-</sup>?

Réponses : 2-  $c = \frac{1}{\sqrt{l\gamma}}$  3- relation de dispersion  $k = \frac{\omega}{c}$  et  $Z = \sqrt{\frac{l}{\gamma}}$

## V. Correction: transmission du son par une cloison

1. On a  $\underline{p}_i(x, t) = p_{im}e^{j(\omega t - kx)}$  et  $\underline{v}_i(x, t) = \frac{p_{im}}{Z}e^{j(\omega t - kx)}$ .
2. La relation de dispersion s'écrit  $k = \frac{\omega}{c}$ .
3. On a  $\underline{p}_r(x, t) = \underline{p}_{rm}e^{j(\omega t + kx)}$  et  $\underline{v}_r(x, t) = \frac{-\underline{p}_{rm}}{Z}e^{j(\omega t + kx)}$ : c'est un  $OPPH^-$  donc attention à la phase et au signe de l'impédance.
4. On a  $\underline{p}_t(x, t) = \underline{p}_{tm}e^{j(\omega t - kx)}$  et  $\underline{v}_t(x, t) = \frac{\underline{p}_{tm}}{Z}e^{j(\omega t - kx)}$ : c'est un  $OPPH^+$ .
5. On a en notation complexe  $\underline{X}_c = X_m e^{j\omega t}$ . La vitesse de la paroi est donc  $\underline{v} = j\omega X_m e^{j\omega t}$  et l'accélération de la paroi est  $\underline{a} = (j\omega)X_m e^{j\omega t} = -\omega^2 X_m e^{j\omega t}$ .
6. La paroi subit les forces de pression à droite  $\overrightarrow{F}_d = -(P_0 + \underline{p}_t(x=0, t))S_c \overrightarrow{e}_x$  et à gauche  $\overrightarrow{F}_g = +(P_0 + \underline{p}_i(x=0, t) + \underline{p}_r(x=0, t))S_c \overrightarrow{e}_x$ .
7. On applique la RFD à la cloison, en projection selon  $Ox$ , on obtient  $M_c(-\omega^2 X_m e^{j\omega t}) = +(P_0 + p_{im}e^{j\omega t} + \underline{p}_{rm}e^{j\omega t})S_c - (P_0 + \underline{p}_{tm}e^{j\omega t})S_c$  soit  $-\omega^2 M_c X_m = (p_{im} + \underline{p}_{rm} - \underline{p}_{tm})S_c$ .

Remarque: pour  $M_c = 0$  on retrouve l'équation de continuité de la pression.

8. On écrit la continuité de la vitesse de part et d'autre de la cloison soit  $j\omega X_m e^{j\omega t} = \underline{v}_i(x=0) + \underline{v}_r(x=0) = \underline{v}_t(x=0)$ . Soit après simplification par  $e^{j\omega t}$  on a  $j\omega X_m = \frac{p_{im}}{Z} - \frac{\underline{p}_{rm}}{Z} = \frac{\underline{p}_{tm}}{Z}$ .

On a donc  $X_m = \frac{p_{im} - \underline{p}_{rm}}{j\omega Z}$ .

9. On prend l'équation obtenue par la RFD:  $-\omega^2 M_c X_m = (p_{im} + \underline{p}_{rm} - \underline{p}_{tm})S_c$ . On remplace  $X_m$  par son expression et  $\underline{p}_{tm}$  par  $p_{im} - \underline{p}_{rm}$ , on en déduit:  $-\omega^2 M_c \frac{p_{im} - \underline{p}_{rm}}{j\omega Z S_c} = p_{im} + \underline{p}_{rm} - (p_{im} - \underline{p}_{rm}) = 2\underline{p}_{rm}$ .

On a donc  $\underline{p}_{rm} = \frac{j\omega M_c}{2S_c Z} (p_{im} - \underline{p}_{rm}) = \frac{j\omega}{\omega_0} (p_{im} - \underline{p}_{rm})$  d'où  $\underline{p}_{rm} = \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} p_{im}$ .

10. On trouve alors  $\tau = \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$  et comme  $p_{im} + \underline{p}_{rm} = \underline{p}_{tm}$  on a  $1 + \tau = \tau$  donc  $\tau = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}}$ . C'est la fonction de transfert d'un filtre passe bas. A haute fréquence  $\tau = 0$  (la cloison coupe les hautes fréquences) et à basse fréquence  $\tau = 1$  (la cloison laisse passer les basses fréquences).

## VI. Correction: Propagation dans un câble coaxial

1. On rappelle les lois de comportement des dipôles:  $u_l = l dx \frac{\partial i}{\partial t}$  et  $i_\gamma = \gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}$ .

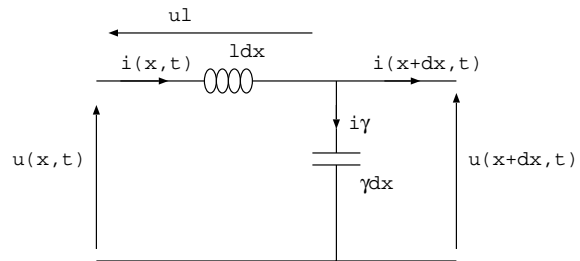
On applique le loi des noeuds:  $i(x, t) = i_\gamma + i(x+dx, t)$

soit  $i(x+dx, t) - i(x, t) = -i_\gamma$  avec  $dx$  petit  $dx \frac{\partial i}{\partial x} =$

$-i_\gamma = -\gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}$  (équation (\*)).

On applique la loi des mailles:  $u(x, t) = u(x+dx, t) + u_l$  soit  $u(x+dx, t) - u(x, t) = -u_l$  avec  $dx$  petit

$dx \frac{\partial u}{\partial x} = -u_l = -l dx \frac{\partial i}{\partial t}$  (équation (\*\*)).



On obtient donc les équations différentielles  $\frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$  et  $\frac{\partial u}{\partial x} = -l \frac{\partial i}{\partial t}$ .

2. On dérive la première équation notée (\*) par rapport à  $x$ :  $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\gamma \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \gamma l \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$ .

On obtient une équation de d'Alembert  $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \gamma l \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$  avec pour vitesse des ondes  $c = \frac{1}{\sqrt{\gamma l}}$ .

On dérive la deuxième équation notée (\*\*) par rapport à  $x$ :  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -l \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right) = -l \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i}{\partial x} \right) = l \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . On

obtient une équation de d'Alembert  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$  avec pour vitesse des ondes  $c = \frac{1}{\sqrt{\gamma l}}$ .

Pour les unités on utilise  $u = L \frac{di}{dt}$  donc  $[L] = [\frac{udt}{di}] = \frac{Vs}{A} = H$

On utilise  $i = c \frac{dU}{dt}$  soit donc  $[C] = [\frac{idt}{dU}] = \frac{As}{V} = F$

soit  $[(l\gamma)^{1/2}] = (H.m^{-1}F.m^{-1})^{1/2} = (\frac{Vs}{A} \frac{As}{V} m^{-1})^{1/2} = s^2 m^{-2}$  donc  $\frac{1}{\sqrt{l\gamma}}$  est bien homogène à une vitesse.

**3.** On a  $u(x, t) = u_0 \cos(\omega t - kx)$  soit  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 u$ . En remplaçant dans l'équation de d'Alembert on trouve  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Je choisis d'utiliser:  $\frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$

On a  $\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega u_0 \sin(\omega t - kx)$

soit  $\frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \omega u_0 \sin(\omega t - kx)$

On intègre par rapport à  $x$ :  $i(x, t) = \frac{\gamma \omega u_0}{k} \cos(\omega t - kx) = c \gamma u_0 \cos(\omega t - kx) = \sqrt{\frac{\gamma}{l}} u_0 \cos(\omega t - kx)$  (j'ai utilisé  $k = \frac{\omega}{c}$  et  $c = \frac{1}{\sqrt{l\gamma}}$ ). La constante d'intégration est nulle car les constantes ne se propagent pas.

On peut trouver le même résultat en partant de l'équation  $\frac{\partial u}{\partial x} = -l \frac{\partial i}{\partial t}$ .

On a  $\frac{\partial u}{\partial x} = +k u_0 \sin(\omega t - kx)$

soit  $\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{k u_0}{l} \sin(\omega t - kx)$

On intègre par rapport à  $t$ :  $i(x, t) = \frac{k u_0}{l \omega} \cos(\omega t - kx) = \frac{u_0}{lc} \cos(\omega t - kx) = \sqrt{\frac{\gamma}{l}} u_0 \cos(\omega t - kx)$  (j'ai utilisé  $k = \frac{\omega}{c}$  et  $c = \frac{1}{\sqrt{l\gamma}}$ ). La constante d'intégration est nulle car les constantes ne se propagent pas.