Chap OM0: les ondes

I. Généralités

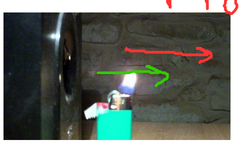
Définition d'une onde: Une onde est la propagation de proche en proche d'une perturbation des propriétés de l'espace associée à un transport d'énergie, sans transport de matière.

Types d'onde: lorsque les signaux associés à l'onde peuvent se mettre sous forme vectorielle, on distingue deux types d'onde:

- Les ondes longitudinales pour lesquelles la direction de la perturbation est la même que la direction de propagation

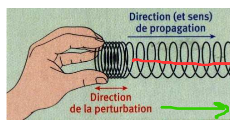
- Les ondes transverses pour lesquelles la direction de la perturbation est ⊥ à la direction de propagation

Exemples: → propagation → perturbation



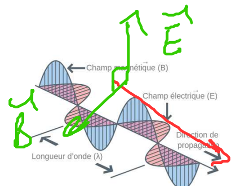
perturbation : vitesse ou pression des tranches de fluide

onde longitudinale



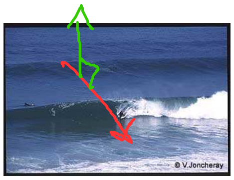
perturbation : position d'une spire

onde longitudinale



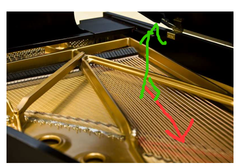
perturbation : champs électrique et magnétique

onde transverse



perturbation : hauteur de l'eau

onde transverse



perturbation : hauteur de la corde

onde transverse

Cas particulier:

perturbation : intensité et tension qui ne sont pas des grandeurs vectorielles

Equation de propagation: c'est la relation vérifiée par les dérivées partielles de la perturbation $s(x,t)$.

Pour des ondes mécaniques, on trouve l'équation de propagation en écrivant la RFD à un système élémentaire

Pour les ondes électromagnétiques, on trouve l'équation de propagation en utilisant les équations de Maxwell.

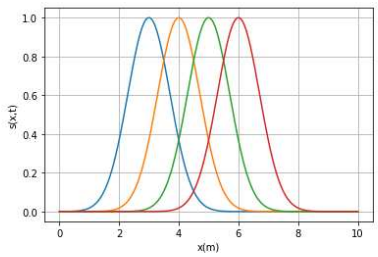
Pour les ondes de courant et de tension, on trouve l'équation de propagation en écrivant les lois des noeuds et des mailles

Dans le cas de propagation sans dispersion, l'équation de propagation est l'équation de d'Alembert de la forme:

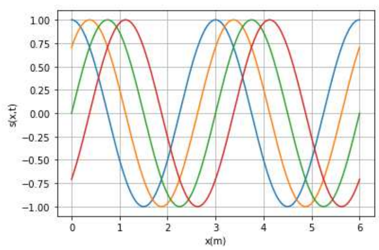
pour $s(x,t)$: $$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$ où c est la célérité des ondes

Solutions de l'équation de d'Alembert

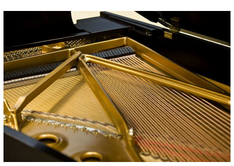
Nous étudierons trois types de solution de l'équation de d'Alembert:

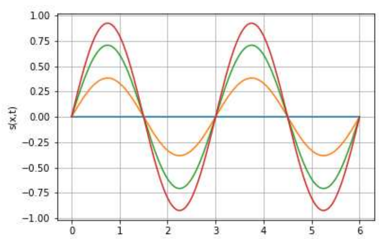


l'onde se propage, type OPP



l'onde se propage et est périodique, type OPPH





· l'onde fait du surplace, elle ne se propage pas, type OS

II. **Solution en OPP**

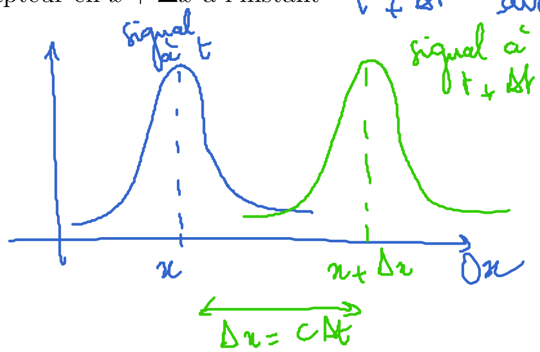
1. Définitions

Onde Plane: les surfaces d'onde (surfaces sur lesquelles la perturbation est uniforme à tout instant) sont des plans // entre eux et $\perp$ à la direction de propagation

Mathématiquement, une onde plane se reconnaît par le fait que la perturbation dépend du temps et d'une seule coord. d'espace en coord. cartésiennes : $s(x,t)$ ou $s(y,t)$ ou $s(z,t)$

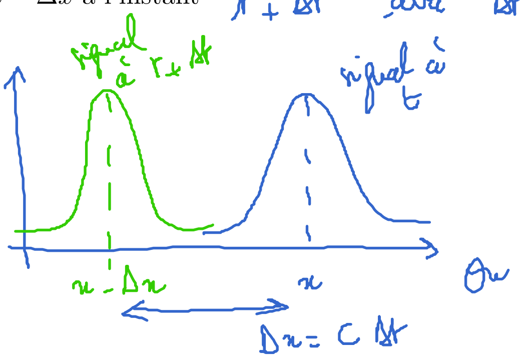
Onde Progressive: l'onde se propage dans un sens déterminé sans déformation

Ainsi pour une onde se propageant selon $+Ox$, le signal reçu sur le capteur en x à l'instant t est reçu sur le capteur en $x + \Delta x$ à l'instant $t + \Delta t$ avec $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$



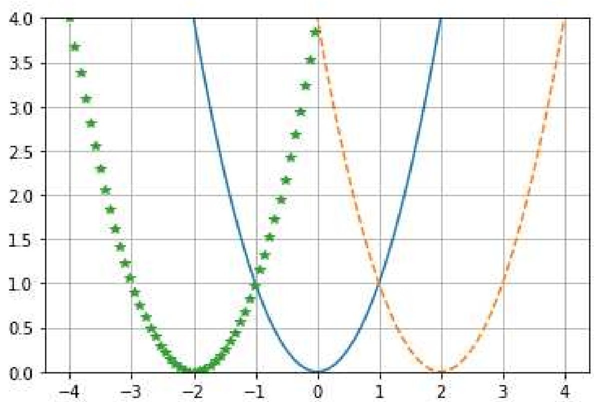
$$s(x,t) = s(x + \Delta x, t + \Delta t)$$

Pour une onde se propageant selon $-Ox$, le signal reçu sur le capteur en x à l'instant t est reçu sur le capteur en $x - \Delta x$ à l'instant $t + \Delta t$ avec $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$



$$s(x,t) = s(x - \Delta x, t + \Delta t)$$

Rappel mathématique:



— $f(x) = x^2$

--- $f(x-2) = (x-2)^2$

** $f(x+2) = (x+2)^2$

$f(x+d)$ est la translatée de $f(x)$ selon les x décroissants comme une onde qui se propage selon $-Ox$

$f(x-d)$ est la translatée de $f(x)$ selon les x croissants comme une onde qui se propage selon $(+Ox)$

2. Ecriture de $s(x,t)$:

La perturbation d'une OPP^+ qui se propage selon $+Ox$ se met sous la forme :

$$\boxed{s(x,t) = f(x - ct) \text{ ou } F(t - x/c)}$$

La perturbation d'une OPP^- qui se propage selon $-Ox$ se met sous la forme :

$$\boxed{s(x,t) = g(x + ct) \text{ ou } G(t + x/c)}$$

Dans le cas général pour une OPP, la solution de l'équation de d'Alembert s'écrit:

$$\boxed{s(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \text{ ou } F(t - x/c) + G(t + x/c)}$$

Exemples: $s(x,t) = s_0 e^{x-ct}$ ou $s(x,t) = s_0(x+ct)^2$

l'onde se propage selon $(+Ox)$

l'onde se propage selon $(-Ox)$

III. **Solution en OPPH**

1. Ecriture de $s(x,t)$

On retient qu'une onde progressive harmonique:

- se propage selon $+Ox$ s'écrit: $s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$

x et t sont dans le m terme ⇒ onde progressive

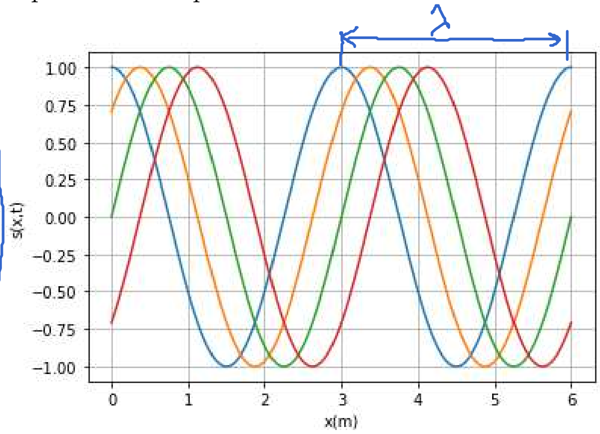
les signes devant x et t sont opposés ⇒ OPP+ (se propage selon +Ox)

- se propageant selon $-Ox$ s'écrit: $s(x,t) = s_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$

x et t sont dans le m terme ⇒ onde progressive

les signes devant x et t sont identiques ⇒ OPP− (se propage selon −Ox)

Représentation spatiale à différents instants: double périodicité



λ : période spatiale

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$: vecteur d'onde (pulsation spatiale)

T : période temporelle

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: pulsation

2. Notation complexe

A la grandeur réelle $s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx)$ on associe le complexe $\underline{s}(x,t) = s_0 e^{j(\omega t - kx)}$.

Intérêts de la notation complexe :

$\frac{\partial \underline{s}}{\partial x} = -jk \times \underline{s}$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial x^2} = (-jk)^2 \underline{s} = -k^2 \underline{s}$ $\qquad$ $(j^2 = -1)$

$\frac{\partial \underline{s}}{\partial t} = j\omega \times \underline{s}$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial t^2} = (j\omega)^2 \underline{s} = -\omega^2 \underline{s}$

Retour à la notation réelle: $s(x,t) = \mathrm{Re}(\underline{s}(x,t))$

Remarque : les expressions des opérateurs dérivées partielles en notation complexe dépendent du choix de l'expression de l'OPPH.

Pour $\underline{s}(x,t) = s_0 e^{j(kx - \omega t)}$. On a alors:

$\frac{\partial \underline{s}}{\partial x} = jk\,\underline{s}$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial x^2} = (jk)^2 \underline{s} = -k^2 \underline{s}$

$\frac{\partial \underline{s}}{\partial t} = -j\omega\,\underline{s}$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial t^2} = (-j\omega)^2 \underline{s} = -\omega^2 \underline{s}$

3. Relation de dispersion

La relation de dispersion est la relation entre k et ω. On la trouve en remplaçant la solution en OPPH dans l'équation de d'Alembert:

- en notation réelle: solution : $s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx)$

éq. diff : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2 s$ d'où $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ ou $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$ donc $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT}$

$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s$ ou $\lambda = cT$ (cohérent)

- en notation complexe: solution : $\underline{s} = s_0 e^{j(\omega t - kx)}$

éq. diff : $\frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial t^2} = 0$

$\frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial x^2} = -k^2 \underline{s}$ d'où $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ ou $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

$\frac{\partial^2 \underline{s}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{s}$

IV. Solution en OS

Une onde stationnaire est une onde qui ne se propage pas, dans l'expression du signal les variables de temps et d'espace ne sont pas dans le même terme

Ecriture de $s(x,t)$:

Pour une OS, le signal est de la forme $s(x,t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$

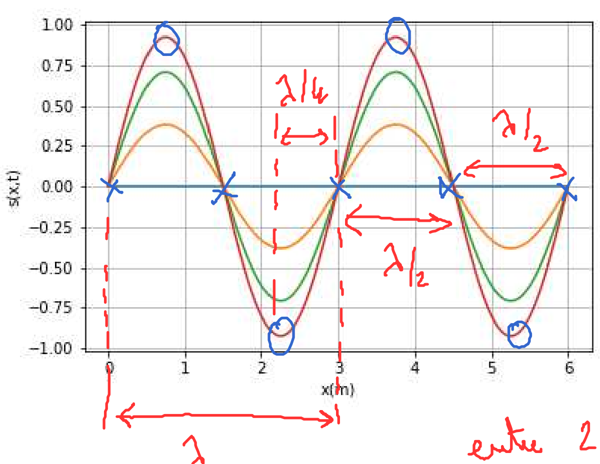
La relation de dispersion est la relation entre k et ω. On la trouve en remplaçant la solution en OS dans l'équation de d'Alembert:

Solution : $s = s_0 \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$

éq. diff : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$ d'où $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 s$ $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -k^2 s$

Représentation spatiale



l'onde fait du "surplace", elle ne se propage pas.

Certains points restent immobiles : ce sont des noeuds (x)

Certains points sont toujours au-dessus ou au dessous des autres : ce sont des ventres (o)

entre 2 noeuds successifs il y a $\lambda/2$
2 ventres

Une onde OS est caractérisée par des noeuds (points où le signal est nul à tout instant) et des ventres (points où le signal est maximal, en valeur absolue, à tout instant).

Position des noeuds: on résout : $s(x,t) = s_0 \underbrace{\cos(\omega t+\varphi)}_{\text{ne peut pas être nul à tout instant}} \cos(kx+\psi) = 0$ à tout instant

donc $\cos(kx+\psi)=0$ soit $kx_n+\psi = \frac{\pi}{2}+n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$

avec $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ soit $\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}x_n + \frac{\psi}{\pi} = \frac{\cancel{\pi}}{2}+n\cancel{\pi}$

donc $x_n = \frac{\lambda}{4}+n\frac{\lambda}{2}-\frac{\psi\lambda}{\pi 2}$ $\quad x_{n+1}-x_n=\frac{\lambda}{2}$: distance entre deux noeuds successifs

Position des ventres: on résout : $s(x,t)=s_0\cos(\omega t+\varphi)\cos(kx+\psi)$ est maximal à tout instant

soit $\cos(kx+\psi)=\pm 1$

d'où $kx_n+\psi=n\pi$ avec $k=\frac{2\pi}{\lambda}$

soit $\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}x_n+\frac{\psi}{\pi}=n\cancel{\pi}$ et $x_n = n\frac{\lambda}{2}-\frac{\psi\lambda}{\pi 2}$

$x_{n+1}-x_n=\frac{\lambda}{2}$: distance entre deux noeuds successifs

V. Choix d'une solution

Données: $\cos p + \cos q = 2(\cos(\frac{p+q}{2}) + \cos(\frac{p-q}{2}))$ et $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

Une OPPH peut être vue somme la superposition de deux OS:

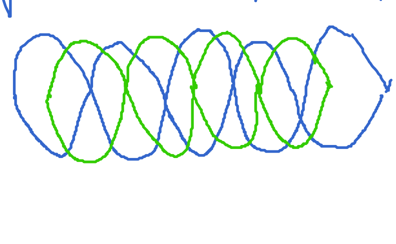
$\hookrightarrow s(x,t)=s_0\cos(\omega t-kx)$

$= \underbrace{s_0\cos(\omega t)\cos(kx)}_{O.S.} + \underbrace{s_0\sin(\omega t)\sin(kx)}_{O.S.}$

les noeuds vérifient $\cos(kx)=0$ | les noeuds vérifient $\sin(kx)=0$

ventres $\cos(kx)=\pm 1$ | ventres $\sin(kx)=\pm 1$

Les 2 OS sont en quadrature de phase spatiale et temporelle



Une OS peut être vue comme la superposition de deux OPPH

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$$

$$= \underbrace{\frac{s_0}{2}\cos(\omega t + kx + \varphi + \psi)}_{OPPH^-} + \underbrace{\frac{s_0}{2}\cos(\omega t - kx + \varphi - \psi)}_{OPPH^+}$$

Une OS peut être vue comme la superposition de 2 OPPH de même amplitude, qui se propagent en sens contraire

Les solutions en OPPH et en OS sont donc équivalentes.

Dans le cas d'une onde se propageant dans un espace de taille infinie, on choisit pour solution une O.P.P.H

Dans le cas d'une onde se propageant dans un espace de taille finie, on choisit pour solution une O.S.