

Correction TD diffusion particules

I. Coefficient de diffusion d'une encre

L'équation de diffusion s'écrit $\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$ soit en analyse dimensionnelle $\frac{n}{t} = D\frac{n}{d^2}$ d'où $d^2 = Dt$. On trace donc la distance d^2 en fonction du temps t . Cela donne une droite passant par l'origine et de pente D .

On trouve par une régression linéaire $D = 1,6.10^{-3} \text{ m}^2.s^{-1}$

II. Coefficient de diffusion de CO_2 dans l'air

1. $[j_D] = \text{particules.m}^{-2}.s^{-1}$ et $[n] = \text{particules.m}^{-3}$.

2. La loi de Fick s'écrit $\vec{j}_D = -D\overrightarrow{\text{grad}n}(x) = -D\frac{dn}{dx}\vec{e}_x$: elle signifie que les particules diffusent des fortes vers les faibles densités de particules soit ici selon $+Ox$.

On a $\frac{dn}{dx} = -\frac{j_D}{D}$ soit $n(x) = -\frac{j_D x}{D} + A$.

On utilise les conditions aux limites: $n(x=0) = n(0) = A$ donc $n(x) = -\frac{j_D x}{D} + n(0)$.

3. On a $n(x=L) = n(L) = -\frac{j_D L}{D} + n(0)$, on en déduit $D = \frac{j_D L}{n(0) - n(L)} = 2,36.10^{-5} \text{ m}^2.s^{-1}$: c'est le bon ordre de grandeur pour la diffusion dans un gaz.

4. Le nombre de molécules de CO_2 qui traversent une surface S pendant $\Delta t = 60 \text{ s}$ s'écrit $N = j_D S \Delta t = 4,61.10^{-16}$ particules.

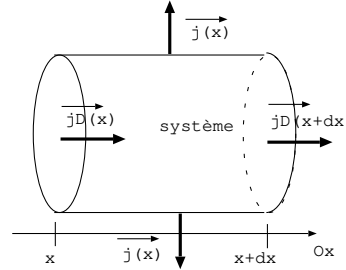
III. Diffusion par une paroi poreuse

4- On considère le système élémentaire de section S compris entre x et $x + dx$:

Nombre de particules qui entrent entre t et $t + dt$: $\delta N_e = j_D(x)\pi a^2 dt$

Nombre de particules qui sortent par diffusion entre t et $t + dt$: $\delta N_s = j_D(x + dx)\pi a^2 dt$

Nombre de particules qui sortent par la paroi poreuse entre t et $t + dt$: $\delta N_l = j(x)2\pi a dx dt$



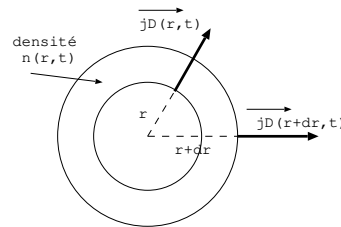
En régime stationnaire le nombre de particules est constant dans le système donc le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s + \delta N_l$ soit $0 = (j_D(x + dx) - j_D(x))\pi a^2 dt + j(x)2\pi a dx$ donc avec dx petit $0 = \frac{dj_D}{dx} dx \pi a^2 dt + j(x)2\pi a dx dt$ donne $\frac{dj_D}{dx} + \frac{2K}{a}(n - n_{ext}) = 0$.

On applique la loi de Fick $j_D = -D\frac{dn}{dx}$ et on doit résoudre l'équation différentielle $-D\frac{d^2 n}{dx^2} + \frac{2K}{a}(n - n_{ext}) = 0$

ou $\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{2K}{aD}(n - n_{ext}) = 0$.

IV. A l'extérieur d'un noyau sphérique

1. Le volume compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ s'écrit $d\tau = 4\pi r^2 dr$ (surface de la petite sphère fois l'épaisseur). Ici le système se trouve à l'intérieur du noyau soit r et $r + dr$ sont supérieurs à R .



2. Le nombre de particules qui entrent dans le système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon r soit $\delta N_e = j_D(r,t)4\pi r^2 dt$.

Le nombre de particules qui sortent du système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon $r + dr$ soit $\delta N_s = j_D(r + dr, t)4\pi(r + dr)^2 dt$.

Le nombre de particules dans le système à l'instant t est $N(t) = n(r, t)4\pi r^2 dr$.

Le nombre de particules dans le système à l'instant $t + dt$ est $N(t + dt) = n(r, t + dt)4\pi r^2 dr$.

3. La conservation du nombre de neutrons s'écrit $N(t + dt) - N(t) = \delta N_e - \delta N_s$.

d'où $n(r, t + dt) - n(r, t)4\pi r^2 dr = -(j_D(r + dr, t)(r + dr)^2 - j_D(r, t)r^2)4\pi dt$

avec dt et dr petits on fait les DL: $\frac{\partial n}{\partial t}4\pi r^2 dr dt = -\frac{\partial(j_D(r, t)r^2)}{\partial r}4\pi dr dt$

soit $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(j_D(r, t)r^2)}{\partial r}$

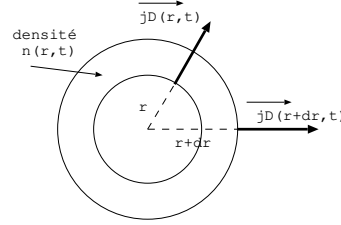
4. En régime stationnaire $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ soit $\frac{\partial(j_D(r, t)r^2)}{\partial r} = 0$ ce qui signifie que $j_D(r, t)r^2 = A$ une constante

soit $j_D(r, t) = \frac{A}{r^2}$. Par identification avec l'énoncé $n = 2$.

5. En régime stationnaire, le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s$ soit $j_D(r + dr, t)4\pi(r + dr)^2 dt = j_D(r, t)4\pi r^2 dt$ et $j_D(r + dr, t)(r + dr)^2 = j_D(r, t)r^2$ donc la fonction $j_D(r, t)r^2$ est constante.

V. A l'intérieur du noyau sphérique

1. Le volume compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ s'écrit $d\tau = 4\pi r^2 dr$ (surface de la petite sphère fois l'épaisseur). Ici le système se trouve à l'intérieur du noyau soit r et $r + dr$ sont inférieurs à R .



2. Le nombre de particules qui entrent dans le système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon r soit $\delta N_e = j_D(r, t)4\pi r^2 dt$.

Le nombre de particules qui sortent du système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon $r + dr$ soit $\delta N_s = j_D(r + dr, t)4\pi(r + dr)^2 dt$.

Le nombre de particules produites dans le système entre t et $t + dt$ est $\delta N_p = p4\pi r^2 dr dt$.

Le nombre de particules dans le système à l'instant t est $N(t) = n(r, t)4\pi r^2 dr$.

Le nombre de particules dans le système à l'instant $t + dt$ est $N(t + dt) = n(r, t + dt)4\pi r^2 dr$.

3. La conservation du nombre de neutrons s'écrit $N(t + dt) - N(t) = \delta N_e - \delta N_s + \delta N_p$.

d'où $n(r, t + dt) - n(r, t)4\pi r^2 dr = -(j_D(r + dr, t)(r + dr)^2 - j_D(r, t)r^2)4\pi dt + p4\pi r^2 dr dt$

avec dt et dr petits on fait les DL: $\frac{\partial n}{\partial t}4\pi r^2 dr dt = -\frac{\partial(j_D(r, t)r^2)}{\partial r}4\pi dr dt + p4\pi r^2 dr dt$

soit $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial(j_D(r, t)r^2)}{\partial r} + p$

4. **4.a.** En régime stationnaire $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ soit $\frac{d(j_D(r, t)r^2)}{dr} = pr^2$.

4.b. La loi de Fick s'écrit $\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(r) = -D \frac{dn}{dr} \vec{e}_r$ soit $j_D = -D \frac{dn}{dr}$ d'où l'équation à résoudre $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dn}{dr} \right) = -\frac{pr^2}{D}$.

4.c. On primitive l'équation précédente par rapport à r : $r^2 \frac{dn}{dr} = -\frac{pr^3}{3D} + A$ qui donne en divisant par r^2 : $\frac{dn}{dr} = -\frac{pr}{3D} + \frac{A}{r^2}$.

On primitive à nouveau: $n(r) = -\frac{pr^2}{6D} - \frac{A}{r} + B$.

L'énoncé nous donne la condition aux limites $n(r = 0) = n_0$ or on observe que dans l'expression de $n(r)$ en

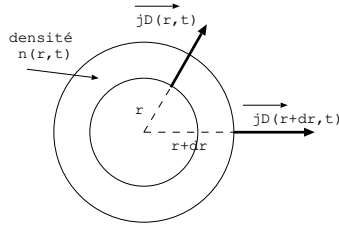
$r = 0$ le terme A/r diverge, on doit donc poser $A = 0$ pour que $n(r)$ existe en $r = 0$ soit $n(r = 0) = 0 + B = n_0$ donc $n(r) = -\frac{pr^2}{6D} + n_0$.

On en déduit la densité à la périphérie du noyau $n(r = R) = -\frac{pR^2}{6D} + n_0$.

5. En régime stationnaire, le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s$ soit $j_D(r + dr, t)4\pi(r + dr)^2 dt = j_D(r, t)4\pi r^2 dt$ et $j_D(r + dr, t)(r + dr)^2 = j_D(r, t)r^2$ donc la fonction $j_D(r, t)r^2$ est constante.

6. On reprend l'exercice en se plaçant immédiatement en régime stationnaire.

Soit le système compris entre les deux sphères de rayons r et $r + dr$ avec r et $r + dr$ inférieurs à R .



en régime stationnaire, le nombre de particules dans le système est constant donc le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e + \delta N_p = \delta N_s$.

Le nombre de particules qui entrent dans le système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon r soit $\delta N_e = j_D(r)4\pi r^2 dt$.

Le nombre de particules qui sortent du système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon $r + dr$ soit $\delta N_s = j_D(r + dr)4\pi(r + dr)^2 dt$.

Le nombre de particules produites dans le système entre t et $t + dt$ est $\delta N_p = p4\pi r^2 dr dt$.

On a donc $(j_D(r + dr)(r + dr)^2 - j_D(r)r^2)4\pi dt = p4\pi r^2 dr dt$ soit pour dr petit $\frac{d}{dr}(j_D(r)r^2)4\pi dr dt = p4\pi r^2 dr dt$ donc $\frac{d}{dr}(j_D(r)r^2) = pr^2$.

A résoudre comme précédemment.

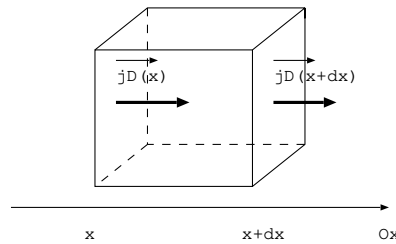
VI. Protection nucléaire

1. On considère le système élémentaire de section S compris entre x et $x + dx$:

Nombre de particules qui entrent entre t et $t + dt$: $\delta N_e = j_D(x)Sdt$

Nombre de particules qui sortent par diffusion entre t et $t + dt$: $\delta N_s = j_D(x + dx)Sdt$

Nombre de particules qui sont absorbées entre t et $t + dt$: $\delta N_a = \frac{n(x)}{\tau}Sdxdt$



En régime stationnaire le nombre de particules est constant dans le système donc le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s + \delta N_a$ soit $0 = (j_D(x + dx) - j_D(x))Sdt + \frac{n(x)}{\tau}Sdxdt$ donc avec dx petit $0 = \frac{dj_D}{dx}dxSdt + \frac{n(x)}{\tau}Sdxdt$ donne $\frac{dj_D}{dx} + \frac{n(x)}{\tau} = 0$.

2. On applique la loi de Fick $j_D = -D\frac{dn}{dx}$ et on doit résoudre l'équation différentielle $-D\frac{d^2n}{dx^2} + \frac{n(x)}{\tau}$ ou encore $\frac{d^2n}{dx^2} - \frac{1}{\tau D}n = 0$ ou $\frac{d^2n}{dx^2} - \frac{n}{\delta} = 0$

On écrit l'équation caractéristique: $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ soit $r^2 = \frac{1}{\tau D}$ et $r = \pm\sqrt{\frac{1}{\tau D}}$.

La solution est $n(x) = Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta}$.

3. On trouve A et B avec les conditions aux limites. La particularité de cet exercice est que l'on ne donne pas n en $x = 0$ et en $x = L$ mais on donne:

$$n(x = 0) = n_0 = A + B$$

$$\text{et } \phi = j_D(x = 0)S \text{ avec } j_D(x) = -D \frac{dn}{dx} = -\frac{D}{\delta}(Ae^{x/\delta} - Be^{-x/\delta}) \text{ soit } \phi = \frac{-DS}{\delta}(A - B).$$

$$\text{On résout le système } A + B = n_0 \text{ et } B - A = \frac{DS}{\delta\phi}.$$

$$\text{On fait la somme } 2B = n_0 + \frac{DS}{\delta\phi} \text{ et on fait la différence } 2A = n_0 - \frac{DS}{\delta\phi}.$$

VII. Correction : oxydation d'un métal

1. $L(t)$ varie très lentement donc sur une petite échelle de temps, la longueur $L(t)$ peut être considérée constante d'où l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire.

On considère un cylindre d'axe Ox compris entre x et $x + dx$. Entre t et $t + dt$, le nombre de particules qui entrent dans ce cylindre est $j(x, t)Sdt$ et le nombre de particules qui en sortent est $j(x + dx, t)Sdt$. En régime stationnaire ces nombres de particules sont égaux soit $j(x) = j(x + dx) = \text{constante}$.

On applique la loi de Fick $\vec{j} = j\vec{e}_x = -D\overrightarrow{\text{grad}}n$ soit $j = -D\frac{dn}{dx} = \text{constante}$. On a donc $\frac{dn}{dx}$ qui est constant (soit $n(x)$ est une fonction affine) et qui s'écrit $\frac{n(x = L) - n(x = 0)}{L} = \frac{C_1 - C_0}{L}$.

$$\text{Ainsi on a } j = D\frac{C_0 - C_1}{L} > 0.$$

2. Les atomes de métal qui diffusent dans la couche d'oxyde et qui arrivent en $x = L$ s'oxydent et font augmenter le volume de la couche de métal.

Un atome oxydé occupe le volume Ω et ici il y a pendant dt , $jSdt$ atomes de métal qui diffusent à travers la surface en $x = L$, donc pendant dt le volume de la couche de métal augmente de $jSdt\Omega = D\frac{C_0 - C_1}{L}Sdt\Omega$.

Du point de vue macroscopique, le volume de la couche de métal à l'instant t est $L(t)S$ et le volume de cette couche de métal à l'instant $t + dt$ est $SL(t + dt)$. Donc la variation de volume de la couche de métal est $SL(t + dt) - SL(t) = S\frac{dL}{dt}dt$.

On écrit que les deux expressions de variation de volume sont égales soit $D\frac{C_0 - C_1}{L}Sdt\Omega = S\frac{dL}{dt}dt$ et on en déduit l'équation différentielle vérifiée par $L(t)$: $\frac{dL}{dt} = \Omega D\frac{C_0 - C_1}{L}$. On la résout en séparant les variables soit:

$$\int_0^{L(t)} LdL = \int_0^t \Omega D(C_0 - C_1)dt \text{ d'où } L(t)^2 = \Omega D(C_0 - C_1)t \text{ et donc } L(t) = \sqrt{2\Omega D(C_0 - C_1)t}.$$

3. On évalue le temps de croissance de la couche c'est d'après l'étude précédente: $t_c = \frac{L(t)^2}{2\Omega D(C_0 - C_1)}$.

On évalue le temps de diffusion d'un atome de métal dans la couche d'oxyde à partir de l'équation de diffusion: $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ donne $\frac{1}{t_d} = \frac{D}{L(t)^2}$ donc $t_d = \frac{L(t)^2}{D}$.

On peut considérer que le régime est quasi stationnaire à condition que le temps de diffusion soit très grand devant le temps d'accroissement de la couche $t_d \gg t_c$ conduit à $C_0 - C_1 \gg \frac{1}{2\Omega}$.

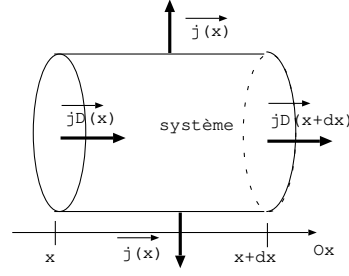
VIII. Diffusion par une paroi poreuse

1. On considère le système élémentaire de section S compris entre x et $x + dx$:

Nombre de particules qui entrent entre t et $t + dt$:
 $\delta N_e = j_D(x)\pi a^2 dt$

Nombre de particules qui sortent par diffusion entre t et $t + dt$: $\delta N_s = j_D(x + dx)\pi a^2 dt$

Nombre de particules qui sortent par la paroi poreuse entre t et $t + dt$: $\delta N_l = j(x)2\pi a dx dt$



En régime stationnaire le nombre de particules est constant dans le système donc le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s + \delta N_l$ soit $0 = (j_D(x + dx) - j_D(x))\pi a^2 dt + j(x)2\pi a dx$ donc avec dx petit $0 = \frac{dj_D}{dx} dx \pi a^2 dt + j(x)2\pi a dx dt$ donne $\frac{dj_D}{dx} + \frac{2K}{a}(n - n_{ext}) = 0$.

2. On applique la loi de Fick $j_D = -D \frac{dn}{dx}$ et on doit résoudre l'équation différentielle $-D \frac{d^2 n}{dx^2} + \frac{2K}{a}(n - n_{ext}) = 0$ ou $\frac{d^2 n}{dx^2} - \frac{2K}{aD}(n - n_{ext}) = 0$.

Par identification avec l'énoncé, on a $\delta = \sqrt{\frac{aD}{2K}}$.

3. La solution particulière est $n_p = n_{ext}$.

La solution générale est $n_g = Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta}$

On a donc $n(x) = n_{ext} + Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta}$, on trouve A et B avec les conditions aux limites: $n(x = 0) = n_0 = n_{ext} + A + B$ et on doit avoir $A = 0$ pour que $n(x)$ ne diverge pas en $+\infty$ soit $B = n_0 - n_{ext}$.

On a donc $n(x) = n_{ext} + (n_0 - n_{ext})e^{-x/\delta}$.

4. Le nombre de particules qui traversent la surface latérale entre x et $x + dx$ pendant Δt est $j(x)2\pi a dx \Delta t$.

On intègre ensuite sur toute la longueur du cylindre pour avoir le nombre total de particules soit $\int_0^L j(x)2\pi a dx \Delta t = 2\pi a \Delta t \int_0^L K(n(x) - n_{ext}) dx = 2\pi a \Delta t K \int_0^L (n_0 - n_{ext}) e^{-x/\delta} dx = 2\pi a \Delta t K (n_0 - n_{ext}) [-\delta e^{-x/\delta}]_0^L = 2\pi a \Delta t K (n_0 - n_{ext}) \delta$ (car $e^{-L/\delta} \approx 0$ puisque L est très grand).