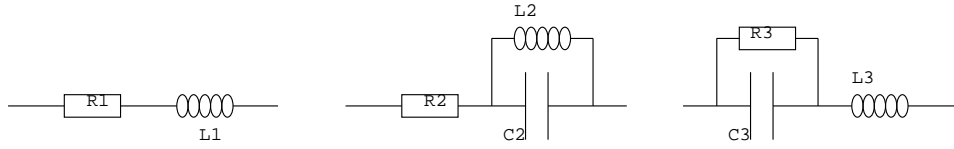


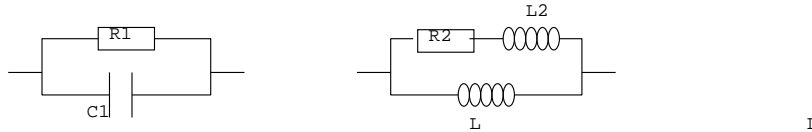
Pour réviser l'électricité

I. Les bases

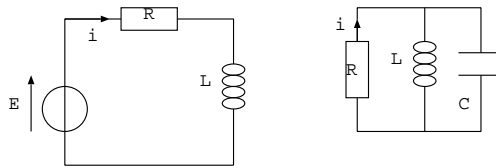
1. Exprimer l'impédance équivalente des montages suivants sans chercher à simplifier le résultat:



2. Exprimer l'admittance équivalente des montages suivants sans chercher à simplifier le résultat:



3. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par i dans les montages suivants:



II. Extrait E3A PC 2019

On souhaite dans cette partie mesurer expérimentalement la capacité C d'un condensateur. Une méthode consiste à soumettre le dipôle [condensateur de capacité C + conducteur ohmique de résistance R] série à un échelon de tension et d'analyser la réponse temporelle de ce dipôle à cette excitation. Le condensateur est initialement déchargé et le conducteur ohmique a pour résistance $R = 1,00 \pm 0,01 \text{ k}\Omega$.

À l'instant de date $t = 0$, le dipôle (RC) est soumis à une tension constante E . Un système d'acquisition permet d'enregistrer tous les $\Delta t = 0,10 \text{ ms}$ la tension u_C aux bornes du condensateur.

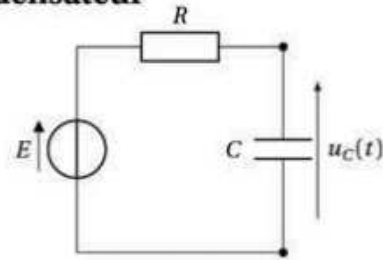


FIGURE 2 – Circuit d'étude

On obtient le graphe $u_{C,exp} = f(t)$ suivant. La courbe de réponse obtenue permet raisonnablement de suggérer un comportement du premier ordre.

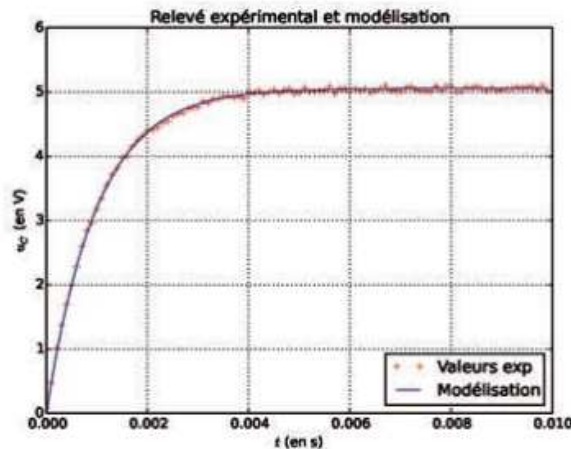


FIGURE 3 – Relevé expérimental et modélisation

B1. Établir l'équation différentielle satisfaite par u_C et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau}$$

B2. Comment nomme-t-on τ ? Quelle est sa signification physique ?

B3. (*) Déterminer à l'aide du relevé expérimental fourni une estimation de τ et de E . Bien expliciter le raisonnement suivi.

B4. En déduire alors une estimation de la capacité C du condensateur.

III. Extrait E3A PC 2020

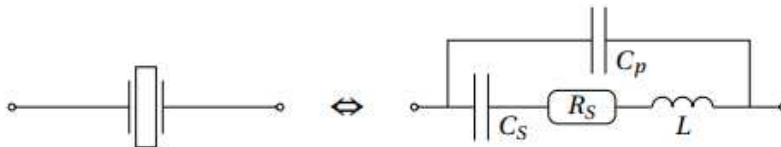


FIGURE 5 – Modèle électrique d'un quartz

Q16 - Établir l'expression simplifiée de l'impédance complexe \underline{Z} du quartz en fonction de la pulsation ω en négligeant la résistance R_S et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{jC_{eq}\omega} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_S^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_P^2}}$$

Quelles sont les expressions de C_{eq} , ω_S et ω_P en fonction de L , C_S (associé à ω_S) et C_P (associé à ω_P) ? Tracer l'allure du module $|\underline{Z}|$ en fonction de ω .

Q17 - Les valeurs numériques du modèle d'un quartz horloger prévu pour osciller à une fréquence $f_0 = 2^{15}$ Hz ont été mesurées avec précision et sont les suivantes :

$$L = 11395 \text{ H} ; C_S = 2,071 \times 10^{-15} \text{ F} ; C_P = 3,05 \text{ pF} ; R_S = 28,57 \text{ k}\Omega.$$

Parmi ces quatre valeurs, quelles sont celles dont l'ordre de grandeur est inhabituel ?

IV. Extrait E3A MP 2022

Un diapason peut être modélisé par un système masse-ressort amorti. L'amortissement provient principalement de la transmission des oscillations des tiges métalliques en vibration sonore.

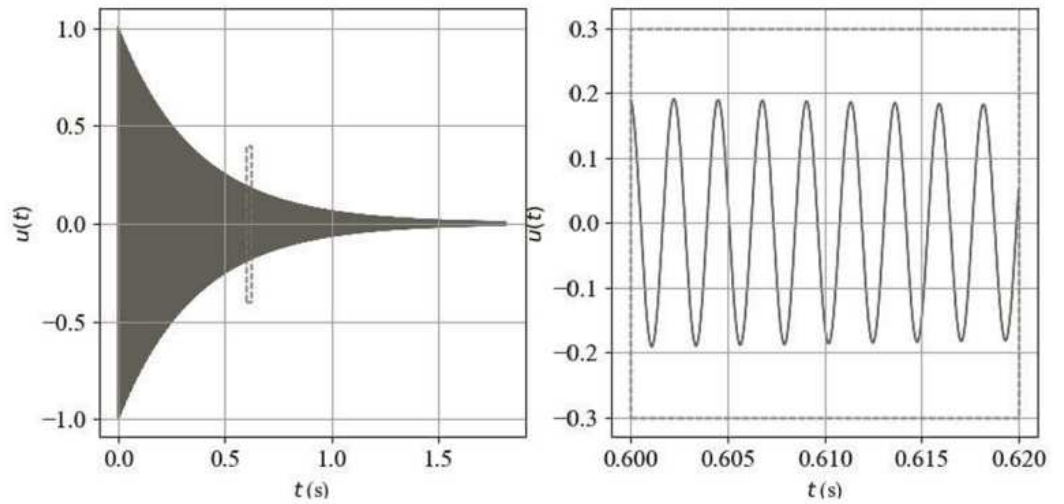
On rappelle l'équation différentielle canonique d'un oscillateur amorti:

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On donne l'enregistrement sonore du diapason sur deux échelles de temps différentes.

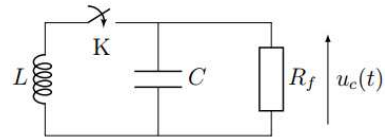
Q1- Ecrire la solution de l'équation différentielle en fonction de deux constantes d'intégration que vous ne chercherez pas à exprimer.

Q2. À partir de l'enregistrement sonore représenté ci-dessus, estimer le facteur d'amortissement Q et la pulsation propre.

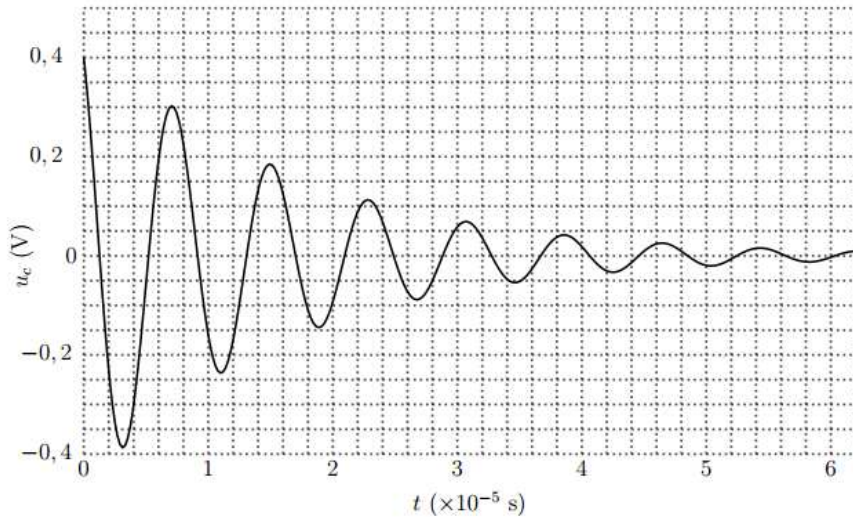


V. Etude d'un régime transitoire

On considère un circuit constitué d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur réel de capacité C et de résistance de fuite R_f . Pour $t < 0$, la tension aux bornes du condensateur vaut U_0 . À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K . Donnée: $C = 5,0 \text{ nF}$.



On a enregistré l'évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $U_c(t)$ sous la forme $\frac{d^2 U_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0$.
2. Déterminer les expressions de $U_c(t = 0^+)$ et $\frac{dU_c}{dt}(t = 0^+)$ en fonction de U_0 , C et R_f .
3. Etablir complètement la solution $U_c(t)$ de l'équation différentielle précédente.
4. Établir l'expression du décroissement logarithmique, noté δ , défini par $\delta = \ln\left(\frac{U_c(t)}{U_c(t+T)}\right)$ où T est la pseudo-période, en fonction de ω_0 , T et Q , puis en fonction de Q uniquement en supposant que $T \approx T_0$ où T_0 est la période propre de l'oscillateur.
5. Déterminer graphiquement la valeur du décroissement logarithmique δ .
6. Déduire de toutes ces mesures les valeurs des composants R_f , L ainsi que la tension initiale U_0 .

VI. Correction: Impédances et admittances

Pour des dipôles en série, l'impédance équivalente est égale à la somme des impédances.

Pour les dipôles en parallèle, l'admittance équivalente est égale à la somme des admittances avec par définition

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Bobine: $\underline{Z}_L = jL\omega$ et $\underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$

Condensateur: $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ et $\underline{Y}_C = jC\omega$.

1. $\underline{Z}_1 = R_1 + jL_1\omega$

$\underline{Z}_2 = R_2 + \underline{Z}'$ avec $\frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1}{jL_2\omega} + jC_2\omega = \frac{1 - L_2C_2\omega^2}{jL_2\omega}$. On a donc $\underline{Z}_2 = R_2 + \frac{jL_2\omega}{1 - L_2C_2\omega^2}$.

$\underline{Z}_3 = \underline{Z}'' + jL_3\omega$ avec $\frac{1}{\underline{Z}''} = \frac{1}{R_3} + jC_3\omega = \frac{1 + jR_3C_3\omega}{R_3}$. On a donc $\underline{Z}_3 = \frac{1 + jR_3C_3\omega}{R_3} + jL_3\omega$.

2. $\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1} + jC_1\omega$

$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2 + jL_2\omega} + \frac{1}{jL\omega}$

3. Circuit RC série: loi des mailles: $E = U_R + U_L$ avec pour les lois de comportement des dipôles $U_R = Ri$ et $U_L = L\frac{di}{dt}$ d'où $E = Ri + L\frac{di}{dt}$ soit $\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{E}{L}$.

Circuit RLC parallèle: loi des noeuds: $i = i_1 + i_2$ avec pour les lois de comportement des dipôles $U = -Ri$ (la résistance est en convention générateur), $U = L\frac{di_1}{dt}$ et $i_2 = C\frac{dU}{dt}$.

On dérive la loi des noeuds pour pouvoir éliminer i_1 qui dans la loi de comportement des dipôles apparaît sous la forme de sa dérivée.

On a donc $\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{U}{L} + C\frac{d^2U}{dt^2}$ avec $U = -Ri$ soit $\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{-Ri}{L} - RC\frac{d^2i}{dt^2}$ ou encore $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$.

4.

VII. Correction: Extrait E3A PC 2019

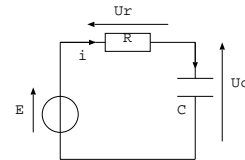
B1- Loi des mailles: $U_c + U_R = E$

Loi de comportement du condensateur: $i = \frac{dU_c}{dt}$

Loi d'Ohm: $U_R = Ri$

On a donc $U_c + RC\frac{dU_c}{dt} = E$ soit $\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{RC} = \frac{E}{RC}$.

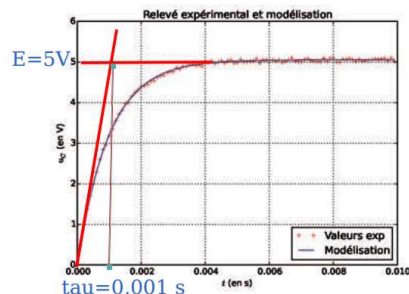
Par identification avec l'énoncé $\tau = RC$.



B2- τ s'appelle le temps caractéristique ou temps de relaxation, il caractérise la durée du régime transitoire atteint pour un temps voisin de 5τ .

B3- A la fin du régime transitoire, on a U_c constante, donc d'après l'équation différentielle $\frac{dU_c}{dt} = 0$ soit $U_c = E$. Sur la courbe on lit $U_c = 5V$ en régime permanent donc $E = 5V$.

On trace la tangente à la courbe en $t = 0$, elle coupe l'asymptote au temps $t = \tau$. On lit sur la courbe $\tau = 0,001s$.



B4- On a $\tau = RC = 1ms$ avec $R = 1,0k\Omega$ donc $C = \frac{\tau}{R} = 1,0\mu F$.

VIII. Correction: Extrait E3A PC 2020

Q16- Les deux branches sont en parallèle donc l'admittance équivalente (soit l'inverse de l'impédance) est la somme de admittances.

On a donc $\underline{Y}_1 = jC_p\omega$ et $\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_s + jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}} \approx \frac{1}{j(L\omega - \frac{1}{C_s\omega})} = \frac{jC_s\omega}{1 - LC_s\omega^2}$ (en négligeant R_s comme c'est indiqué dans l'énoncé).

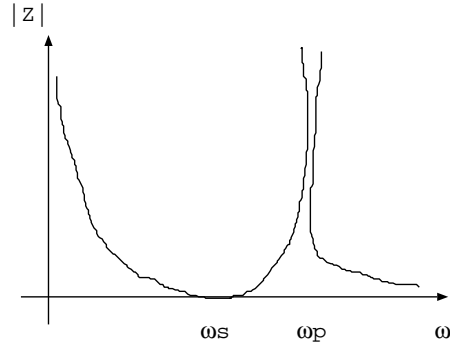
Donc l'admittance équivalente est $Y_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = jC_p\omega + \frac{jC_s\omega}{1 - LC_s\omega^2}$.

On en déduit l'impédance $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{jC_p\omega + \frac{jC_s\omega}{1 - LC_s\omega^2}} = \frac{1 - LC_s\omega^2}{jC_p\omega(1 - LC_s\omega^2) + jC_s\omega} = \frac{1 - LC_s\omega^2}{j\omega(C_p - LC_sC_p\omega^2 + C_s)} = \frac{1 - LC_s\omega^2}{j\omega(C_p + C_s)(1 - \frac{LC_sC_p}{C_p + C_s}\omega^2)}$.

Par identification $\omega_s^2 = \frac{1}{LC_s}$, $C_{eq} = C_s + C_p$, $\omega_p^2 = \frac{C_p + C_s}{LC_sC_p} = \frac{1}{LC_s}(1 + \frac{C_s}{C_p}) > \omega_s^2$.

Le module de \underline{Z} s'écrit: $|\underline{Z}| = \frac{1}{C_{eq}\omega} \frac{|1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}|}{|1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}|}$.

Ce module est nul pour $\omega = \omega_s$ et ce module diverge pour $\omega \approx \omega_p$ avec, d'après les expressions trouvées $\omega_s < \omega_p$. De plus quand ω tend vers zéro, le module de \underline{Z} diverge et quand ω tend vers l'infini, le module tend vers zéro.



Q17- En TP, les inductances sont de l'ordre de quelques 10 mH, les capacités sont de l'ordre du nF, les résistances de l'ordre du kΩ.

Les valeurs inhabituelles sont la valeur de l'inductance (très élevée) et la capacité C_s (très faible).

IX. Correction: Extrait E3A MP 2022

Q1- On écrit l'équation caractéristique: $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ et son discriminant: $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$.

On observe sur les courbes un régime pseudo oscillant, ce qui correspond à un discriminant négatif, d'où les

solutions de l'équation caractéristique: $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}}$.

La solution de l'équation différentielle est donc:

$x(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}}$ (la partie réelle de r va dans l'exponentielle et la partie imaginaire de r va dans les cos et sin).

Q2- On lit sur la courbe de droite la période des oscillations: $T = \frac{18}{8} = 2,25 \text{ ms}$. Quand on observe beaucoup d'oscillations pendant le régime transitoire, cela veut dire que Q est grand et donc que $\omega \approx \omega_0$.

On a donc $\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2,810^3 \text{ rad.s}^{-1}$.

Sur la courbe de gauche on observe la courbe enveloppe qui correspond à l'exponentielle, on trace donc les tangentes à l'origine des courbes exponentielles, elles coupent l'asymptote $x = 0$ en $t = \tau$. On lit $\tau = 0,4 \text{ s}$.

Les exponentielles sont de la forme $e^{-t/\tau}$ soit par identification avec $e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$, on a $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ soit $Q = \frac{\omega_0 \tau}{2} = 560$: c'est énorme pour un facteur de qualité mais cela correspond tout à fait à ce que l'on observe, le régime tran-

sitoire est très très long par rapport à la période, le système oscille longtemps, les frottements sont très faibles.

X. Etude d'un régime transitoire

1. Loi des noeuds: $i_L + i_R + i_C = 0$

On applique les lois de comportement des dipôles (ici les 3 dipôles sont en convention récepteur) soit:

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt}, U_C = R_f i_R \text{ et } U_C = L \frac{di_L}{dt}.$$

On dérive la loi des noeuds pour éliminer i_L dont on connaît la dérivée en fonction de U_C soit: $\frac{di_L}{dt} + \frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt} = 0$ en remplaçant par les lois de comportement des dipôles on a: $\frac{U_C}{L} + \frac{1}{R_f} \frac{dU_C}{dt} + C \frac{d^2 U_C}{dt^2} = 0$

D'où l'équation différentielle vérifiée par U_C : $\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{1}{R_f C} \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{LC} = 0$.

Par identification on a: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_f C}$ donc $Q = R_f C \omega_0 = R_f \sqrt{\frac{C}{L}}$.

2. On détermine les CI sur U_C et dU_C/dt en utilisant:

- la loi des noeuds et comportement des dipôles à $t = 0^+$

- et la continuité du courant dans la bobine et la continuité de la tension dans le condensateur (explication: lorsque l'on ferme l'interrupteur, on crée une modification instantanée dans ce circuit, au cours de cette modification, les grandeurs électriques peuvent changer instantanément passer d'une valeur finie à une valeur nulle par exemple, ou réciproquement. Toutes les grandeurs électriques peuvent subir ce changement instantané SAUF les courants dans les bobines et les tensions aux bornes des condensateurs, qui ont la même valeur juste avant et juste après la fermeture de l'interrupteur. Cela vient du fait que l'énergie dans une bobine s'écrit $E_{mag} = \frac{Li^2}{2}$ et l'énergie étant continue, le courant i dans la bobine l'est aussi. L'énergie dans un condensateur s'écrit $E_{elec} = \frac{CU^2}{2}$, elle est continue donc la tensions aux bornes du condensateur aussi)).

Ainsi on a $U_C(t = 0^-) = U_C(t = 0^+)$ or $U_C(t = 0^-) = U_0$ d'après l'énoncé donc $U_C(t = 0^+) = U_0$.

De plus le courant dans la bobine est nul avant fermeture de l'interrupteur donc $i_L(t = 0^-) = i_L(t = 0^+) = 0$. Donc d'après la loi des noeuds à $t = 0^+$ on a $i_R(t = 0^+) = -i_C(t = 0^+)$.

Et en appliquant les lois de comportement des dipôles on a: $i_R(t = 0^+) = \frac{U_C(t = 0^+)}{R_f} = \frac{U_0}{R_f}$ et $i_C(t = 0^+) = C \frac{dU_C}{dt}(t = 0^+)$ d'où: $\frac{U_0}{R_f} = -C \frac{dU_C}{dt}(t = 0^+)$ donc $\frac{dU_C}{dt}(t = 0^+) = -\frac{U_0}{R_f C}$.

3. On écrit l'équation caractéristique: $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$ et son discriminant: $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$.

On observe sur la courbe un régime pseudo périodique, ce qui correspond à un discriminant négatif, d'où les

solutions de l'équation caractéristique: $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}}$.

La solution de l'équation différentielle est donc:

$U_C(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$ avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}}$ (la partie réelle de r va dans l'exponentielle et la partie imaginaire de r va dans les cos et sin).

On détermine A et B avec les CI:

$$U_C(t = 0^+) = U_0 = A$$

$$\text{On calcule } \frac{dU_C}{dt} = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \left(-\frac{\omega_0}{2Q} A \cos(\omega t) - \frac{\omega_0}{2Q} B \sin(\omega t) - A \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t) \right)$$

$$\text{Soit à } t = 0^+: \frac{dU_C}{dt}(t = 0^+) = -\frac{U_0}{R_f C} = -\frac{\omega_0}{2Q} A + B \omega, \text{ on en déduit } B.$$

On a donc $U_C(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} (U_0 \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$.

4. La fonction $U_C(t)$ est pseudo-périodique de pseudo période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et les fonctions $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$

elles sont périodiques de période T donc on a $\cos(\omega(t+T)) = \cos(\omega t)$ et $\sin(\omega(t+T)) = \sin(\omega t)$.

Ainsi $U_C(t+T) = e^{-\frac{\omega_0(t+T)}{2Q}}(U_0 \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$ et $U_C(t)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$.

On remplace dans l'expression du décrement $\delta = \ln\left(\frac{U_C(t)}{U_C(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}{e^{-\frac{\omega_0(t+T)}{2Q}}}\right) = \ln\left(e^{+\frac{\omega_0 T}{2Q}}\right) = \frac{\omega_0 T}{2Q} \approx \frac{\omega_0 T_0}{2Q} \approx \frac{2\pi}{2Q} \approx \frac{\pi}{Q}$.

5. Je lis sur la courbe $U_C(t = 0,7 \cdot 10^{-5} \text{ s}) = 0,3 \text{ V}$ (je choisis un instant t qui correspond à un maximum de tension sur la courbe) et une pseudo-période plus tard $U_C(t+T) = 0,18 \text{ V}$, on a donc $\delta = \ln\left(\frac{0,3}{0,18}\right) = 0,5$ (remarque vous pouvez faire le calcul de δ à partir de n'importe quel temps t , le tout c'est de prendre un temps t qui correspond à un maximum de U_C pour repérer facilement le temps $t+T$ sur la courbe).

6. Je mesure la pseudo-période sur la courbe $6T = (5,4 - 0,7) \cdot 10^{-5} \text{ s}$ soit $T = 7,8 \mu\text{s}$ et la valeur $U_C(t=0) = U_0 = 0,4 \text{ V}$.

Or on a $T_0 \approx T = 7,8 \mu\text{s}$ et $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 8,0 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$ et $Q = \frac{\pi}{\delta} = 6,3$.

On a $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ donc $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = 0,3 \text{ mH}$.

On a $Q = R_f C \omega_0$ donc $R_f = \frac{Q}{C\omega_0} = 1,6 \text{ k}\Omega$.