Correction TD diffusion particules

I. Coefficient de diffusion d'une encre

L'équation de diffusion s'écrit $\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n$ soit en analyse dimensionnelle $\frac{n}{t} = D\frac{n}{d^2}$ d'où $d^2 = Dt$. On trace donc la distance d^2 en fonction du temps t. Cela donne une droite passant par l'origine et de pente D.

On trouve par une régression linéaire $D = 1,6.10^{-3}\ m^2.s^{-1}$

II. Coefficient de diffusion de CO_2 dans l'air

1. $[j_D] = particules.m^{-2}.s^{-1}$ et $[n] = particules.m^{-3}$.

2. La loi de Fick s'écrit $\overrightarrow{j_D} = -D\overrightarrow{\text{grad}}n(x) = -D\frac{dn}{dx}\overrightarrow{e_x}$: elle signifie que les particules diffusent des fortes vers les faibles densités de particules soit ici selon $+Ox$.

On a $\frac{dn}{dx} = -\frac{j_D}{D}$ soit $n(x) = -\frac{j_D x}{D} + A$.

On utilise les conditions aux limites: $n(x=0) = n(0) = A$ donc $n(x) = -\frac{j_D x}{D} + n(0)$.

3. On a $n(x=L) = n(L) = -\frac{j_D L}{D} + n(0)$, on en déduit $D = \frac{j_D L}{n(0) - n(L)} = 2,36.10^{-5}\ m^2.s^{-1}$: c'est le bon ordre de grandeur pour la diffusion dans un gaz.

4. Le nombre de molécules de CO_2 qui traversent une surface S pendant $\Delta t = 60\ s$ s'écrit $N = j_D S\Delta t = 4,61.10^{-16}$ particules.

III. Diffusion par une paroi poreuse

1a- On a $dN(t) = n(x,t)Sdx$ et $dN(t+dt) = n(x,t+dt)Sdx$

1b- Les neutrons qui entrent dans le système sont ceux qui traversent la surface $S = \pi a^2$ en x entre t et $t+dt$ soit $\delta N_e = j_D(x,t)Sdt$.

Les neutrons qui sortent du système sont ceux qui traversent la surface $S = \pi a^2$ en $x+dx$ entre t et $t+dt$ soit $\delta N_s = j_D(x+dx,t)Sdt$.

Les neutrons qui traversent la surface latérale sont $\delta N_l = j(x,t)2\pi a dx dt$.

1c- La conservation du nombre de neutrons s'écrit $dN(t+dt) = dN(t) + \delta N_e - \delta N_s - \delta N_l$

Soit $(n(x,t+dt) - n(x,t))Sdx = -(j_D(x+dx,t) - j_D(x,t))Sdt - j(x,t)2\pi a dx dt$

Soit pour dt et dx petits: $\frac{\partial n}{\partial t}dtSdx = -\frac{\partial j_D}{\partial x}dx\pi a^2 dt - j(x,t)2\pi a dx dt$

2- En régime stationnaire $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$ donc $-\frac{\partial j_D}{\partial x}a - j(x,t)2 = 0$

3- On utilise la loi de Fick $\overrightarrow{j_D} = -D\overrightarrow{grad}n = -D\frac{dn}{dx}\overrightarrow{e_x}$ soit $j_D = -D\frac{dn}{dx}$.

On a donc $D\frac{d^2n}{dx^2}a - 2K(n - n_{ext}) = 0$ ou encore $\frac{d^2n}{dx^2} - \frac{2K}{Da}n = -\frac{2K}{Da}n_{ext}$.

Par identification avec l'énoncé on a $\delta = \sqrt{\frac{Da}{2K}}$.

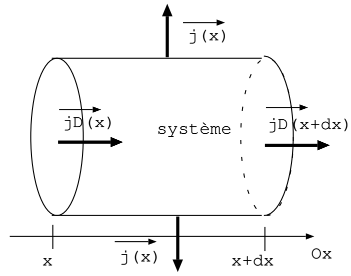
La solution particulière est $n_p = n_{ext}$.

La solution générale est $n_g = Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta}$

On a donc $n(x) = n_{ext} + Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta}$, on trouve A et B avec les conditions aux limites: $n(x=0) = n_0 = n_{ext} + A + B$ et $n(x=L) = n_{ext} = n_{ext} + Ae^{-L/\delta} + Be^{L/\delta} \approx n_{ext} + Be^{+L/\delta}$ (On prend L très grand, si ce n'est pas dit dans l'énoncé c'est un oubli de ma part) donc $B = 0$.

On a donc $n(x) = n_{ext} + (n_0 - n_{ext})e^{-x/\delta}$.

4- On considère le système élémentaire de section S compris entre x et $x+dx$:



Nombre de particules qui entrent entre t et $t+dt$: $\delta N_e = j_D(x)\pi a^2 dt$

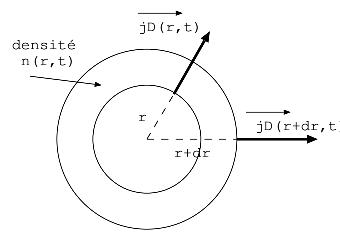
Nombre de particules qui sortent par diffusion entre t et $t+dt$:$\delta N_s = j_D(x+dx)\pi a^2 dt$

Nombre de particules qui sortent par la paroi poreuse entre t et $t+dt$: $\delta N_l = j(x) 2\pi a dx dt$

En régime stationnaire le nombre de particules est constant dans le système donc le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s + \delta N_l$ soit $0 = (j_D(x+dx) - j_D(x))\pi a^2 dt + j(x)2\pi a dx$ donc avec dx petit $0 = \dfrac{dj_D}{dx} dx \pi a^2 dt + j(x)2\pi a dx dt$ donne $\dfrac{dj_D}{dx} + \dfrac{2K}{a}(n - n_{ext}) = 0$.

On applique la loi de Fick $j_D = -D\dfrac{dn}{dx}$ et on doit résoudre l'équation différentielle $-D\dfrac{d^2n}{dx^2} + \dfrac{2K}{a}(n - n_{ext}) = 0$ ou $\dfrac{d^2n}{dx^2} - \dfrac{2K}{aD}(n - n_{ext}) = 0$.

IV. **A l'extérieur d'un noyau sphérique**



1. Le volume compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$ s'écrit $d\tau = 4\pi r^2 dr$ (surface de la petite sphère fois l'épaisseur). Ici le système se trouve à l'intérieur du noyau soit r et $r+dr$ sont supérieurs à R.

2. Le nombre de particules qui entrent dans le système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon r soit $\delta N_e = j_D(r,t)4\pi r^2 dt$.

Le nombre de particules qui sortent du système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon $r+dr$ soit $\delta N_s = j_D(r+dr,t)4\pi(r+dr)^2 dt$.

Le nombre de particules dans le système à l'instant t est $N(t) = n(r,t)4\pi r^2 dr$.

Le nombre de particules dans le système à l'instant $t+dt$ est $N(t+dt) = n(r,t+dt)4\pi r^2 dr$.

3. La conservation du nombre de neutrons s'écrit $N(t+dt) - N(t) = \delta N_e - \delta N_s$.

d'où $n(r, t+dt - n(r,t))4\pi r^2 dr = -(j_D(r+dr,t)(r+dr)^2 - j_D(r,t)r^2)4\pi dt$

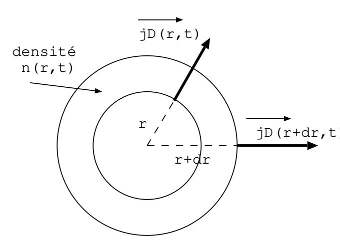
avec dt et dr petits on fait les DL: $\dfrac{\partial n}{\partial t}4\pi r^2 dr dt = -\dfrac{\partial(j_D(r,t)r^2)}{\partial r}4\pi dr dt$

soit $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(j_D(r,t)r^2)}{\partial r}$

4. En régime stationnaire $\dfrac{\partial n}{\partial t} = 0$ soit $\dfrac{\partial(j_D(r,t)r^2)}{\partial r} = 0$ ce qui signifie que $j_D(r,t)r^2 = A$ une constante soit $j_D(r,t) = \dfrac{A}{r^2}$. Par identification avec l'énoncé $n = 2$.

5. En régime stationnaire, le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s$ soit $j_D(r+dr,t)4\pi(r+dr)^2 dt = j_D(r,t)4\pi r^2 dt$ et $j_D(r+dr,t)(r+dr)^2 = j_D(r,t)r^2$ donc la fonction $j_D(r,t)r^2$ est constante.

V. **A l'intérieur du noyau sphérique**



1. Le volume compris entre les sphères de rayons r et $r+dr$ s'écrit $d\tau = 4\pi r^2 dr$ (surface de la petite sphère fois l'épaisseur). Ici le système se trouve à l'intérieur du noyau soit r et $r+dr$ sont inférieurs à R.

2. Le nombre de particules qui entrent dans le système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon r soit $\delta N_e = j_D(r,t)4\pi r^2 dt$.

Le nombre de particules qui sortent du système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon $r+dr$ soit $\delta N_s = j_D(r+dr,t)4\pi(r+dr)^2 dt$.

Le nombre de particules produites dans le système entre t et $t+dt$ est $\delta N_p = p4\pi r^2 dr dt$.

Le nombre de particules dans le système à l'instant t est $N(t) = n(r,t)4\pi r^2 dr$.

Le nombre de particules dans le système à l'instant $t+dt$ est $N(t+dt) = n(r,t+dt)4\pi r^2 dr$.

3. La conservation du nombre de neutrons s'écrit $N(t+dt) - N(t) = \delta N_e - \delta N_s + \delta N_p$.

d'où $n(r,t+dt - n(r,t))4\pi r^2 dr = -(j_D(r+dr,t)(r+dr)^2 - j_D(r,t)r^2)4\pi dt + p4\pi r^2 dr dt$

avec dt et dr petits on fait les DL: $\dfrac{\partial n}{\partial t}4\pi r^2 dr dt = -\dfrac{\partial(j_D(r,t)r^2)}{\partial r}4\pi dr dt + p4\pi r^2 dr dt$

soit $\dfrac{\partial n}{\partial t} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(j_D(r,t)r^2)}{\partial r} + p$

4. **4.a.** En régime stationnaire $\dfrac{\partial n}{\partial t} = 0$ soit $\dfrac{d(j_D(r,t)r^2)}{dr} = pr^2$.

4.b. La loi de Fick s'écrit $\overrightarrow{j_D} = -D\overrightarrow{grad}\ n(r) = -D\dfrac{dn}{dr}\overrightarrow{e_r}$ soit $j_D = -D\dfrac{dn}{dr}$ d'où l'équation à résoudre $\dfrac{d}{r}(r^2\dfrac{dn}{dr}) = -\dfrac{pr^2}{D}$.

4.c. On primitive l'équation précédente par rapport à r: $r^2\dfrac{dn}{dr} = -\dfrac{pr^3}{3D} + A$ qui donne en divisant par r^2: $\dfrac{dn}{dr} = -\dfrac{pr}{3D} + \dfrac{A}{r^2}$.

On primitive à nouveau: $n(r) = -\dfrac{pr^2}{6D} - \dfrac{A}{r} + B$.

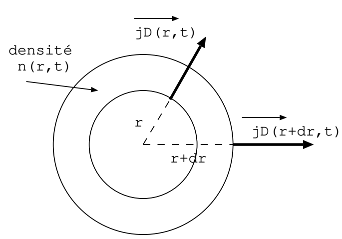
L'énoncé nous donne la condition aux limites $n(r=0) = n_0$ or on observe que dans l'expression de $n(r)$ en $r=0$ le terme A/r diverge, on doit donc poser $A=0$ pour que $n(r)$ existe en $r=0$ soit $n(r=0) = 0+B = n_0$ donc $n(r) = -\dfrac{pr^2}{6D} + n_0$.

On en déduit la densité à la périphérie du noyau $n(r=R) = -\dfrac{pR^2}{6D} + n_0$.

5. En régime stationnaire, le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s$ soit $j_D(r+dr,t)4\pi(r+dr)^2 dt = j_D(r,t)4\pi r^2 dt$ et $j_D(r+dr,t)(r+dr)^2 = j_D(r,t)r^2$ donc la fonction $j_D(r,t)r^2$ est constante.

6. On reprend l'exercice en se plaçant immédiatement en régime stationnaire.

Soit le système compris entre les deux sphères de rayons r et $r+dr$ avec r et $r+dr$ inférieurs à R.



en régime stationnaire, le nombre de particules dans le système est constant donc le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e + \delta N_p = \delta N_s$.

Le nombre de particules qui entrent dans le système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon r soit $\delta N_e = j_D(r)4\pi r^2 dt$.

Le nombre de particules qui sortent du système est le nombre de particules qui traversent la sphère de rayon $r+dr$ soit $\delta N_s = j_D(r+dr)4\pi(r+dr)^2 dt$.

Le nombre de particules produites dans le système entre t et $t+dt$ est $\delta N_p = p4\pi r^2 dr dt$.

On a donc $(j_D(r+dr)(r+dr)^2 - j_D(r)r^2)4\pi dt = p4\pi r^2 dr dt$ soit pour dr petit $\dfrac{d}{dr}(j_D(r)r^2)4\pi dr dt = p4\pi r^2 dr dt$

donc $\dfrac{d}{dr}(j_D(r)r^2) = pr^2$.

A résoudre comme précédemment.

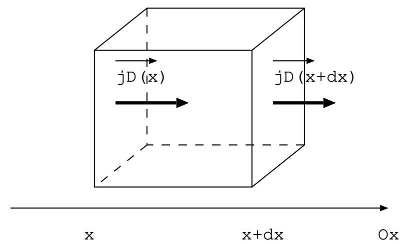
VI. **Protection nucléaire**

1. On considère le système élémentaire de section S compris entre x et $x + dx$:

Nombre de particules qui entrent entre t et $t + dt$: $\delta N_e = j_D(x)Sdt$

Nombre de particules qui sortent par diffusion entre t et $t + dt$:$\delta N_s = j_D(x + dx)Sdt$

Nombre de particules qui sont absorbées entre t et $t + dt$: $\delta N_a = \dfrac{n(x)}{\tau}Sdxdt$



En régime stationnaire le nombre de particules est constant dans le système donc le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s + \delta N_a$ soit $0 = (j_D(x + dx) - j_D(x))Sdt + \dfrac{n(x)}{\tau}Sdxdt$ donc avec dx petit $0 = \dfrac{dj_D}{dx}dxSdt + \dfrac{n(x)}{\tau}Sdxdt$ donne $\dfrac{dj_D}{dx} + \dfrac{n(x)}{\tau} = 0$.

2. On applique la loi de Fick $j_D = -D\dfrac{dn}{dx}$ et on doit résoudre l'équation différentielle $-D\dfrac{d^2n}{dx^2} + \dfrac{n(x)}{\tau}$ ou encore $\dfrac{d^2n}{dx^2} - \dfrac{1}{\tau D}n = 0$ ou $\dfrac{d^2n}{dx^2} - \dfrac{n}{\delta} = 0$

On écrit l'équation caractéristique: $r^2 - \dfrac{1}{\delta^2} = 0$ soit $r^2 = \dfrac{1}{\tau D}$ et $r = \pm\sqrt{\dfrac{1}{\tau D}}$.

La solution est $n(x) = Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta}$.

3. On trouve A et B avec les conditions aux limites. La particularité de cet exercice et que l'on ne donne pas n en $x = 0$ et en $x = L$ mais on donne:

$n(x = 0) = n_0 = A + B$

et $\phi = j_D(x = 0)S$ avec $j_D(x) = -D\dfrac{dn}{dx} = -\dfrac{D}{\delta}(Ae^{x/\delta} - Be^{-x/\delta}$ soit $\phi = \dfrac{-DS}{\delta}(A - B)$.

On résout le système $A + B = n_0$ et $B - A = \dfrac{DS}{\delta\phi}$.

On fait la somme $2B = n_0 + \dfrac{DS}{\delta\phi}$ et on fait la différence $2A = n_0 - \dfrac{DS}{\delta\phi}$.

VII. **Correction : oxydation d'un métal**

1. $L(t)$ varie très lentement donc sur une petite échelle de temps, la longueur $L(t)$ peut etre considérée constante d'où l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire.

On considère un cylindre d'axe Ox compris entre x et $x + dx$. Entre t et $t + dt$, le nombre de particules qui entrent dans ce cylindre est $j(x, t)Sdt$ et le nombre de particules qui en sortent est $j(x + dx, t)Sdt$. En régime stationnaire ces nombres de particules sont égaux soit $j(x) = j(x + dx) = $ constante.

On applique la loi de Fick $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_x} = -D\overrightarrow{\text{grad}}n$ soit $j = -D\dfrac{dn}{dx} = $ constante. On a donc $\dfrac{dn}{dx}$ qui est constant (soit $n(x)$ est une fonction affine) et qui s'écrit $\dfrac{n(x = L) - n(x = 0)}{L} = \dfrac{C_1 - C_0}{L}$.

Ainsi on a $j = D\dfrac{C_0 - C_1}{L} > 0$.

2. Les atomes de métal qui diffusent dans la couche d'oxyde et qui arrivent en $x = L$ s'oxydent et font augmenter le volume de la couche de métal.

Un atome oxydé occupe le volume Ω et ici il y a pendant dt, $jSdt$ atomes de métal qui diffusent à travers la surface en $x = L$, donc pendant dt le volume de la couche de métal augmente de $jSdt\Omega = D\dfrac{C_0 - C_1}{L}Sdt\Omega$.

Du point de vue macroscopique, le volume de la couche de métal à l'instant t est $L(t)S$ et le volume de cette couche de métal à l'instant $t+dt$ est $SL(t+dt)$. Donc la variation de volume de la couche de métal est $SL(t+dt) - SL(t) = S\dfrac{dL}{dt}dt$.

On écrit que les deux expressions de variation de volume sont égales soit $D\dfrac{C_0 - C_1}{L}Sdt\Omega = S\dfrac{dL}{dt}dt$ et on en déduit l'équation différentielle vérifiée par $L(t)$: $\dfrac{dL}{dt} = \Omega D\dfrac{C_0 - C_1}{L}$. On la résout en séparant les variables soit:

$\displaystyle\int_0^{L(t)} LdL = \int_0^t \Omega D(C_0 - C_1)dt$ d'où $L(t)^2 = \Omega D(C_0 - C_1)t$ et donc $L(t) = \sqrt{2\Omega D(C_0 - C_1)t}$.

3. On évalue le temps de croissance de la couche c'est d'après l'étude précédente: $t_c = \dfrac{L(t)^2}{2\Omega D(C_0 - C_1)}$.

On évalue le temps de diffusion d'un atome de métal dans la couche d'oxyde à partir de l'équation de diffusion: $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ donne $\dfrac{1}{t_d} = \dfrac{D}{L(t)^2}$ donc $t_d = \dfrac{L(t)^2}{D}$.

On peut considérer que le régime est quasi stationnaire à condition que le temps de diffusion soit très grand devant le temps d'accroissement de la couche $t_d >> t_c$ conduit à $C_0 - C_1 >> \dfrac{1}{2\Omega}$.

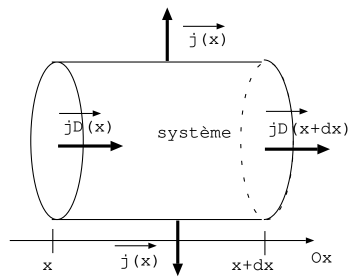
VIII. **Diffusion par une paroi poreuse**

1. On considère le système élémentaire de section S compris entre x et $x + dx$:

Nombre de particules qui entrent entre t et $t + dt$: $\delta N_e = j_D(x)\pi a^2 dt$

Nombre de particules qui sortent par diffusion entre t et $t + dt$:$\delta N_s = j_D(x + dx)\pi a^2 dt$

Nombre de particules qui sortent par la paroi poreuse entre t et $t + dt$: $\delta N_l = j(x) 2\pi a dx dt$



En régime stationnaire le nombre de particules est constant dans le système donc le nombre de particules reçues est égal au nombre de particules perdues soit $\delta N_e = \delta N_s + \delta N_l$ soit $0 = (j_D(x+dx) - j_D(x))\pi a^2 dt + j(x)2\pi a dx$ donc avec dx petit $0 = \dfrac{dj_D}{dx} dx \pi a^2 dt + j(x) 2\pi a dx dt$ donne $\dfrac{dj_D}{dx} + \dfrac{2K}{a}(n - n_{ext}) = 0$.

2. On applique la loi de Fick $j_D = -D\dfrac{dn}{dx}$ et on doit résoudre l'équation différentielle $-D\dfrac{d^2n}{dx^2} + \dfrac{2K}{a}(n - n_{ext}) = 0$ ou $\dfrac{d^2n}{dx^2} - \dfrac{2K}{aD}(n - n_{ext}) = 0$.

Par identification avec l'énoncé, on a $\delta = \sqrt{\dfrac{aD}{2K}}$.

3. La solution particulière est $n_p = n_{ext}$.

La solution générale est $n_g = Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta}$

On a donc $n(x) = n_{ext} + Ae^{x/\delta} + Be^{-x/\delta}$, on trouve A et B avec les conditions aux limites: $n(x = 0) = n_0 = n_{ext} + A + B$ et on doit avoir $A = 0$ pour que $n(x)$ ne diverge pas en $+\infty$ soit $B = n_0 - n_{ext}$.

On a donc $n(x) = n_{ext} + (n_0 - n_{ext})e^{-x/\delta}$.

4. Le nombre de particules qui traversent la surface latérale entre x et $x + dx$ pendant Δt est $j(x)2\pi a dx \Delta t$.

On intègre ensuite sur toute la longueur du cylindre pour avoir le nombre total de particules soit $\int_0^L j(x)2\pi a dx \Delta t = 2\pi a \Delta t \int_0^L K(n(x) - n_{ext})dx = 2\pi a \Delta t K \int_0^L (n_0 - n_{ext})e^{-x/\delta}dx = 2\pi a \Delta t K(n_0 - n_{ext})[-\delta e^{-x/\delta}]_0^L = 2\pi a \Delta t K(n_0 - n_{ext})\delta$ (car $e^{-L/\delta} \approx 0$ puisque L est très grand).