

Corrigé du sujet e3a PC 2020

1. $\vec{F} = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{u}_r$.
2. (a) Comme il s'agit d'une force centrale, son moment calculé par rapport à O est nul, donc d'après le TMC, le moment cinétique du satellite est constant. On en déduit que le mouvement est plan.
- (b) Comme il n'y a pas de frottements, d'après le théorème de l'énergie mécanique, E_m est conservée.
- (c) La force de gravitation est une force conservative associée à l'énergie potentielle

$$E_p = -G \frac{mM_T}{r}.$$

On utilise les coordonnées polaires dans le plan perpendiculaire au moment cinétique. La norme du moment cinétique s'écrit alors $L_O = mr^2\dot{\theta} = mC$ avec la constante des aires. Et la norme de la vitesse au carré vaut $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + (r\dot{\theta})^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{C}{r}\right)^2$.

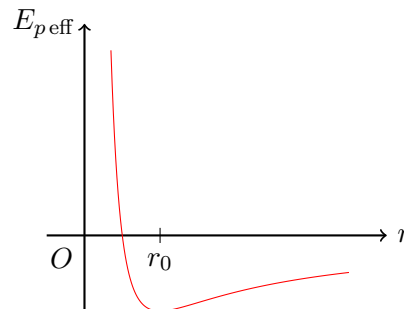
On en déduit l'expression de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{C}{r}\right)^2 \right)$, puis l'expression de l'énergie mécanique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - G \frac{mM_T}{r} + \frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2}.$$

En posant $A = GmM_T$ et $B = \frac{1}{2}mC^2$, on retrouve bien l'expression de l'énoncé.

On a $\frac{dE_{p\text{eff}}}{dr} = \frac{A}{r^2} - \frac{2B}{r^3} = \frac{Ar - 2B}{r^3}$.

3. La dérivée s'annule donc pour $r_0 = \frac{2B}{A}$. Il s'agit du rayon de l'orbite circulaire stable du satellite. Sur l'orbite de travail d'un satellite NAVSTAR, on a $r_0 = 2,64 \cdot 10^4$ km.



$\frac{d^2 E_{p\text{eff}}}{dr^2}(r_0) = \frac{2B}{r_0^4} > 0$, donc il s'agit bien d'un minimum. $E_{p\text{eff}}$ est l'énergie potentielle effective du système.

4. D'après la troisième loi de Képler, la période de révolution du satellite vaut

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{GM_T}} = 4,26 \cdot 10^4 \text{ s} = 11 \text{ h } 50 \text{ min } 19 \text{ s}.$$

Le satellite fait donc un peu plus de deux fois le tour de la Terre en un jour sidéral.

5. $E_{m1} = -G \frac{mM_T}{2(R_T + h_1)} = -2,02 \cdot 10^{10} \text{ J}$.
6. La valeur optimale est $\lambda = 0$ afin que le satellite au sol ait le maximum d'énergie mécanique. On a alors $E_{m0} = -5,00 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

Les moteurs doivent donc fournir environ 30 GJ au satellite pour le mettre sur sa première orbite.

7. Le demi grand axe vaut $a = \frac{R_T + h_1 + r_0}{2}$, donc $E_{m12} = -9,34 \text{ GJ}$.

8. Si le satellite n'a quasiment pas bougé, sa variation d'énergie mécanique correspond à la variation d'énergie cinétique, soit $E_{m12} - E_{m1} = \frac{1}{2}m(V_1 + \Delta V_1)^2 - \frac{1}{2}mV_1^2$.

De plus, on sait que pour une trajectoire circulaire, on a $E_{m1} = -E_{c1} = -\frac{1}{2}mV_1^2$, donc $V_1 = \sqrt{\frac{-2E_{m1}}{m}} = 7,11 \text{ km.s}^{-1}$.

On en déduit que $\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2(E_{m12} - 2E_{m1})}{m}} - V_1 = 1,70 \text{ km.s}^{-1}$.

9. Le satellite décrit une demi ellipse pour changer d'orbite, donc le transert dure une demi période $\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{(R_T + h_1 + r_0)^3}{8GM_T}} = 1,12.10^4 \text{ s} = 3,11 \text{ h}$.

10. Un satellite géostationnaire a une période de rotation de un jour sidéral. Il est donc immobile au dessus d'un point donné de la Terre, avec une orbite circulaire dans le plan de l'équateur à une altitude d'environ 36.10^3 km .

Il permet de faire des observations continues d'une même zone (intéressant pour la météo).

11. Il faudrait beaucoup trop de satellites géostationnaires pour un système GPS afin de pouvoir avoir au minimum quatre satellites à proximité d'un point de la surface de la Terre.

12. $\Delta E = h\Delta\nu_{cs} = 3,70176703.10^{-5} \text{ eV}$.

Les niveaux sont hyperfins par rapport aux niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène qui diffèrent de quelques eV.

13. La précision sur la durée du trajet est de $3,3.10^{-8} \text{ s}$, elle est bien assurée par une horloge atomique qui a une précision de $\frac{1}{\Delta\nu_{cs}} = 1,1.10^{-10} \text{ s}$.

14. La dérive journalière en distance serait de 11 km , ce qui n'est pas acceptable.

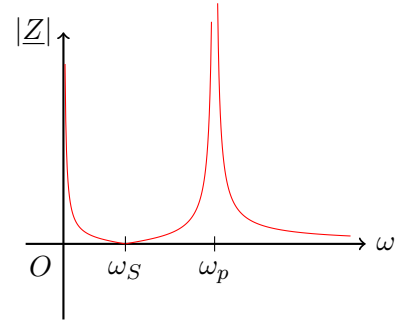
15. Le trajet de l'onde entre le satellite et le récepteur prend environ $6,67.10^{-2} \text{ s}$. La dérive d'une horloge à quartz sur cette durée est de 4.10^{-9} s , ce qui est bien inférieur à la précision nécessaire calculée à la question 13. On peut donc utiliser des horloges à quartz dans les récepteurs des signaux GPS.

16. C_S et L sont en série, et ils sont en parallèle avec C_p , donc $\underline{Z} = \frac{1}{jC_p\omega + \frac{1}{\frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC_S\omega}}}}$
- $$\underline{Z} = \frac{1}{jC_p\omega + \frac{jC_S\omega}{1 - LC_S\omega^2}} = \frac{1 - LC_S\omega^2}{j(C_S + C_p)\omega - jLC_S C_p\omega^3} = \frac{1}{j(C_S + C_p)\omega} \frac{1 - LC_S\omega^2}{1 - \frac{LC_S C_p}{C_S + C_p}\omega^2}$$

En posant $C_{eq} = C_S + C_p$, $\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC_S}}$ et $\omega_P = \sqrt{\frac{C_S + C_p}{LC_S C_p}}$, on obtient bien

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC_{eq}\omega} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_S^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_P^2}}$$

On a $|\underline{Z}| \rightarrow +\infty$ si $\omega \rightarrow 0$ ou ω_p
 et $|\underline{Z}| \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow \omega_S$ ou $+\infty$, d'où le tracé ci-contre
 $(\omega_p = \omega_S \sqrt{1 + \frac{C_S}{C_p}} > \omega_S)$:



17. L est très élevée, et C_S est très faible.

18. $\frac{\omega_p - \omega_S}{\omega_p} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C_S}{C_p}}} = 3,39 \cdot 10^{-4}$; ces deux pulsations sont extrêmement proches. On

peut donc régler très précisément la fréquence de fonctionnement de l'horloge à quartz.

19. La fréquence du quartz étant réglée précisément, il pourrait convenir pour les récepteurs GPS. L'intérêt d'une puissance entière de 2 et de faciliter les diviseurs de fréquence pour revenir à une mesure de 1 seconde.

20. Le poids de l'électron est de l'ordre de 10^{-29} N alors que la force électrique est de l'ordre de 10^{-19} N. Le poids est donc bien négligeable.

La force de Lorentz s'écrit $\vec{F} = -e (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B})$.

Le terme dû au champ magnétique est de l'ordre de $ev_e B_0$, et celui dû au champ électrique est de l'ordre de eE_0 , avec $B_0 = \frac{E_0}{c}$ pour une OPPH, donc $ev_e B_0 = \frac{v_e}{c} eE_0$.

Pour un électron non relativiste, $v_e \ll c$, et on peut négliger le terme dû au champ magnétique.

21. On applique le PFD à un électron dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E}, \text{ donc en notation complexe, } m_e i\omega \vec{v} = -e \underline{\vec{E}}.$$

On en déduit que $\vec{v} = \frac{-e}{im_e \omega} \underline{\vec{E}}$, et on peut ensuite écrire le vecteur densité de courant

$$\underline{\vec{j}} = -en_e \vec{v} = \frac{n_e e^2}{im_e \omega} \underline{\vec{E}}.$$

D'après la loi d'Ohm locale, $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}}$, donc $\underline{\gamma} = \frac{n_e e^2}{im_e \omega}$.

Si la conductivité est imaginaire pure, cela signifie que la puissance moyenne dissipée par effet Joule est nulle.

22. Les équations de Maxwell dans un milieu neutre de conductivité $\underline{\gamma}$ s'écrivent

$$\begin{cases} \text{div} \underline{\vec{E}} = 0 \\ \text{div} \underline{\vec{B}} = 0 \\ \text{rot} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \\ \text{rot} \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\text{On a } \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \underline{\vec{E}}) - \underline{\Delta} \underline{\vec{E}}, \text{ soit } -\underline{\Delta} \underline{\vec{E}} = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} \right).$$

$$\text{On en déduit que } \underline{\Delta} \underline{\vec{E}} = \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2}.$$

$$\text{La relation de dispersion s'écrit } -k^2 = i\omega \mu_0 \underline{\gamma} - \frac{\omega^2}{c^2}, \text{ soit } k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 n_e e^2}{m_e} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 c^2 m_e}.$$

On posant $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$, on obtient $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.

23. Dans la partie basse de l'ionosphère, la densité de molécules d'air est encore élevée, les collisions entre électrons et ions sont fréquentes ; un électron peut retrouver rapidement un ion positif : la recombinaison est rapide et n_e est faible . Dans les couches les plus hautes, la recombinaison est plus lente donc il y a plus d'électrons libres et n_e augmente.

Au delà de 350 km, la densité de molécules d'air est encore plus faible, donc il y a très peu d'électrons libérés et n_e devient de plus en plus faible.

24. $f_p = 9$ MHz. Les ondes se propagent si k est réel, donc si la fréquence est supérieure à f_p . Un satellite dont l'altitude est supérieure à 1000 km doit donc utiliser des fréquences supérieures à 9 MHz pour communiquer avec la Terre.

25. La vitesse de phase vaut $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{fc}{\sqrt{f^2 - f_p^2}}$.

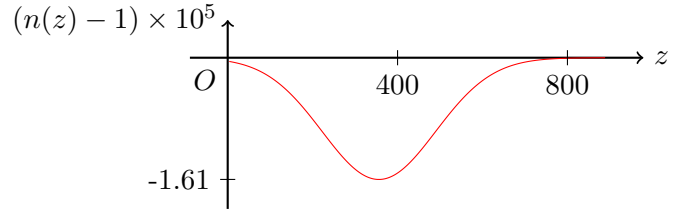
On en déduit l'indice optique $n = \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}}$, indice qui est inférieur à 1.

26. Comme $f_p \ll f_1$, on a $n \simeq 1 - \frac{f_p^2}{2f_1^2} = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2 m_e \epsilon_0} \frac{n_e}{f_1^2}$.

En posant $a = \frac{e^2}{8\pi^2 m_e \epsilon_0}$, on a bien $n \simeq 1 - a \frac{n_e}{f_1^2}$.

$$n(z) - 1 = -a \frac{n_e}{f_1^2}.$$

Cette grandeur est donc nulle pour $z = 0$ et $z > 800$ km, et elle est minimale pour $z \simeq 350$ km.



27. Entre 1000 et 350 km, n_e augmente, donc n diminue. D'après les lois de Descartes, cela signifie que l'onde a un angle plus élevé par rapport à la normale, donc c'est le tracé (a) qui est correct.

28. Le temps de parcours de l'onde qui se propage dans le vide vaut $\frac{H_0}{c} = \frac{1}{c} \int_0^{H_0} dz$, et le

temps de parcours de l'onde dans l'ionosphère vaut $\int_0^{H_0} \frac{dz}{v_g} = \frac{1}{c} \int_0^{H_0} \frac{c}{v_g} dz$.

On obtient donc bien $\tau_1 = \frac{1}{c} \int_0^{H_0} \frac{c}{v_g} dz - \frac{1}{c} \int_0^{H_0} dz = \frac{1}{c} \int_0^{H_0} \left(\frac{c}{v_g} - 1 \right) dz$.

$$L_1 = \int_0^{H_0} \left(\frac{c}{v_g} - 1 \right) dz, \text{ avec } \frac{c}{v_g} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f_1^2}}} \simeq 1 + \frac{f_p^2}{2f_1^2} = 1 + a \frac{n_e}{f_1^2}.$$

On en déduit que $L_1 \simeq \frac{a}{f_1^2} \int_0^{H_0} n_e dz = \frac{a}{f_1^2} C_{ET}$.

29. Le C_{ET} correspond à l'aire sous la courbe de la figure 6, soit environ 3.10^{17} m^{-2} .

On en déduit que $L_1 = 5$ m. Cette précision est acceptable.

30. $\tau_{\text{ret}} = \frac{a C_{ET}}{c} \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)$, donc $C_{ET} = \frac{c \tau_{\text{ret}}}{a \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)} = 1,9.10^{19} \text{ m}^{-2}$.

On en déduit que $L_1 = 311$ m. Cette valeur est très élevée à cause des fluctuations du C_{ET} .

31. La carte est obtenue en temps réel en mesurant τ_{ret} pour différents récepteurs placés à la surface de la Terre.

Le C_{ET} est le plus élevé là où le soleil est au zénith, car n_e est alors plus élevé, le rayonnement solaire augmentant l'ionisation. La zone où le C_{ET} est le plus élevé est donc proche de l'équateur, et elle se déplace vers l'Ouest au fur et à mesure du temps.