

## E3A : Épreuve de Physique-modélisation PC Session 2018

Corrigé proposé par Henri Gonnord

Pour toute remarque : [hgonnord@gmail.com](mailto:hgonnord@gmail.com)

### Des ondes pas toujours harmoniques

#### PREMIÈRE PARTIE : Les ondes sonores

##### A / Mise en équation

**A1.**

Voir cours. L'équation linéarisée et projetée sur l'axe  $(Ox)$  s'écrit : 
$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{E}).$$

**A2.**

Voir cours. L'équation linéarisée et projetée sur l'axe  $(Ox)$  est : 
$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{M}).$$

**A3.**

Le coefficient de compressibilité isentropique est défini par 
$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$$
 ou encore par

$$\chi_S = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$
. Une fois linéarisée, cette expression devient : 
$$\chi_S = \frac{1}{\mu_0} \frac{\rho}{p} \quad (\text{T}).$$

**A4.**

Voir cours. On obtient l'expression demandée avec 
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$$
. La généralisation à trois dimensions

fait apparaître le Laplacien scalaire : 
$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

**A5.**

Voir cours : en utilisant l'équation d'état du gaz parfait et en différentiant la loi de Laplace on obtient

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0}.$$

Par ailleurs l'équation d'état du gaz parfait conduit à 
$$\mu_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}$$
, soit la célérité de l'onde :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}.$$

Application numérique pour l'air à 20 °C : 
$$c = 0,34 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

##### B / Étude d'une onde sonore harmonique

**B1.**

Cette onde est plane car la surpression est uniforme sur chaque surface équiphase (d'équation  $x = cte$ ) et que ces surfaces sont des plans.

Elle est progressive car elle contient le terme  $\omega t - kx$  et peut donc se mettre sous la forme  $f(x - ct)$  avec  $c = \frac{\omega}{k}$ , et elle se propage dans le sens des  $x$  croissants (présence du terme « - » entre le terme en  $x$  et celui en  $t$ ).

Enfin elle est harmonique car la notation exponentielle complexe conduit en notation réelle à  $p(x, t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$ .

**B2.**

En injectant l'expression donnée de la surpression dans l'équation de propagation on obtient directement  $\omega = k \times c$ . On en déduit que la vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$  est constante et que le milieu est donc non dispersif.

**B3.**

En utilisant l'équation (E) en notation complexe :  $\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$  et en injectant l'expression complexe de la surpression on obtient  $\mu_0 j \omega \underline{v}(x, t) = -p_0 (-jk) e^{j(\omega t - kx)}$ , soit :  $\underline{v}(x, t) = \frac{1}{\mu_0 c} p(x, t)$ , d'où enfin  $Z = \mu_0 c$  (impédance acoustique).

**B4.**

Pour un gaz parfait on a déjà écrit  $c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$  et  $\mu_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}$ , soit  $Z = P_0 \sqrt{\frac{\gamma M}{RT_0}}$ . Numériquement pour l'air à 20 °C et avec  $P_0 = 1,00$  bar on obtient  $Z = 408 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**B5.**

Une puissance est homogène à  $F \times v$ , une pression est homogène à une force divisée par une surface donc  $p \times v$  est bien une puissance surfacique et s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

**B6.**

L'intensité sonore est proportionnelle à une puissance. En électricité la puissance est proportionnelle à  $u^2$  donc en électricité on pourrait écrire  $G_{dB} = 10 \log \left( \frac{P_s}{P_e} \right) = 10 \log \left( \frac{u_s^2}{u_e^2} \right) = 20 \log \left( \frac{u_s}{u_e} \right)$  : les deux définitions sont bien cohérentes.

**B7.**

L'intensité sonore est  $I_M = \langle pv \rangle = \frac{1}{2} p_0 v_0 = \frac{1}{2} Z v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{Z}$ , soit  $v_0 = \sqrt{\frac{2I_M}{Z}}$  ou encore  $p_0 = \sqrt{2ZI_M}$ . Par ailleurs en inversant la relation donnant la relation entre l'intensité sonore et l'intensité en décibels, on obtient  $I_M = I_0 \times 10^{\frac{I_{dB}}{10}}$ . D'après la figure 1, un son très intense est donné par exemple par  $I_{dB} = 120 \text{ dB}$  (seuil de la douleur), ce qui correspond à  $I_M = 1,00 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . De là on calcule  $p_0 \approx 3 \times 10^1 \text{ Pa}$  et  $v_0 \approx 7 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On vérifie bien  $p_0 \ll P_0$  et  $v_0 \ll c$ .

**C / Spectre d'un instrument de musique****C1.**

Le son créé par un instrument de musique, s'il est continu (note tenue et sans tenir compte de l'attaque du son) est périodique et son spectre est discret (fondamental + harmoniques de fréquences multiples de celle du fondamental).

Un bruit qui contient toutes les fréquences possède un spectre continu.

L'analyse de Fourier permet de décomposer le son d'un instrument en somme de sons harmoniques de fréquences présentes dans son spectre.

**C2a.**

La mesure sur la figure 2a de 8 périodes de la courbe nous permet d'écrire  $8T_0 = 18 \text{ ms}$ , soit

$$T_0 = 2,2 \text{ ms} \text{ et donc } f_0 = 0,44 \text{ kHz}.$$

L'étude du spectre de la figure 2b nous donne un fondamental (fréquence la plus basse du spectre) à  $f_0 \approx 0,45 \text{ kHz}$ , ce qui est cohérent avec l'analyse de la courbe 2a.

### C2b.

Le spectre 2 contient deux pics (le fondamental et un harmonique) et correspond donc à un signal temporel proche d'une sinusoïde. Il s'agit donc de l'enregistrement (a), c'est à dire la flûte. Au contraire le spectre 1 contient de nombreux harmoniques et correspond à un signal temporel ne ressemblant pas du tout à un signal sinusoïdal : il s'agit de l'enregistrement (b) (harmonium).

### C3a.

La fréquence d'échantillonnage  $f_e$  doit vérifier l'inégalité suivante, avec  $f_{\max}$ , fréquence maximale présente dans le signal :  $f_e > 2f_{\max}$ . C'est le critère de Shannon-Nyquist.

Dans le cas d'un mauvais choix de  $f_e$  on observe le phénomène de repliement spectral.

Dans le cas où  $f_{\max} = 20 \text{ kHz}$ , on choisira  $f_e = 44 \text{ kHz}$  par exemple (cas du CD audio).

### C3b.

Dans le cas de l'enregistrement du signal de l'harmonium précédent où est présente une fréquence d'harmonique  $f = 4,4 \text{ kHz}$ , le choix d'une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 6,0 \text{ kHz}$  par exemple entraînerait un repliement de l'harmonique correspondant à  $f_e - f = 1,6 \text{ kHz}$  qui sera parfaitement audible et détériorera le signal. Pour éviter cela on utilise un filtre anti-repliement (un filtre passe-bas qui élimine du signal les fréquences supérieures à  $\frac{f_e}{2}$ ).

### C4a.

La fonction demandée prend deux arguments et renvoie directement le nombre complexe demandé utilisant la fonction exp de la bibliothèque numpy :

```
def omega(a, N):  
    return np.exp(-2j*a*np.pi/N)
```

### C4b.

```
def TF(tab):  
    N = len(tab) # nécessité de calculer la longueur de la liste (utilisée dans les boucles)  
    trans = [] # initialisation de la liste qui contiendra la TF  
    for i in range(N): # boucle pour le calcul de chaque terme de la TF  
        s = 0 # initialisation de la somme pour le i-ème élément de la TF  
        for j in range(N): # boucle pour le calcul de la somme correspondant au i-ème terme  
            s += tab[j]*omega(i*j,N) # ajout du j-ème terme de la somme  
        trans.append(s) # ajout de la somme comme i-ème élément de la TF  
    return trans
```

### C4c.

La fonction TF comporte deux boucles imbriquées comportant chacune N itérations : Il s'agit donc d'une complexité en  $\Theta(N^2)$ .

### C5a.

Le code demandé est le suivant :

```

def separe(T):
    pair = True # Drapeau booléen qui commutera à chaque changement d'indice
                # On commence par l'indice 0 qui est pair
    P = [] # initialisation des deux listes d'indices pair/impair
    I = []
    for i in T:
        if pair:
            P.append(i) # remplissage de la liste des indices pairs
        else:
            I.append(i) # remplissage de la liste des indices impairs
        pair = not pair # commutation du drapeau
    return P, I

```

### C5b.

```

def TFR(T):
    N = len(T) # calcul une bonne fois pour toutes de la longueur de la liste à traiter
    p = N // 2 # calcul de la longueur des deux sous-listes
    if N == 1:
        return T # condition d'arrêt des appels récursifs
                # la TF d'une liste de 1 élément est elle-même
                # l'appel à la fonction se termine alors
                # mais si N > 1 l'appel continue :
    P, I = separe(T) # on sépare la liste en deux sous-listes
    TFP = TFR(P) # calcul récursif de la TF de P
    TFI = TFR(I) # calcul récursif de la TF de I
    # on peut maintenant déduire la TF de T des deux TF précédentes
    # création d'une liste vide qui contiendra la TF de T
    TFT = []
    for k in range(p): # calcul de la première moitié de la TF de T
        # la boucle commence à k=0 et termine à k=p-1
        TFT.append(TFP[k] + omega(k, N)*TFI[k]) # ajout du k-ème élément
    for k in range(p, N): # calcul de la deuxième moitié de la TF de T
        # la boucle commence à k=p et termine à k=N-1
        TFT.append(TFP[k-p] + omega(k, N)*TFI[k-p]) # ajout du k-ème élément
    return TFT # on n'oublie pas de renvoyer le résultat de la TF

```

### C5c.

(a) Dans le cas où  $N > 1$ , chaque appel à la fonction TFR engendre 2 appels récursifs supplémentaires nécessaires aux calculs de TFP et de TFI. Il faut aussi tenir compte de tous les appels récursifs inclus dans les calculs de TFP et TFI.

On peut donc en déduire immédiatement que  $C(q) = 2C(q-1) + 2$  si  $q > 0$ . On a par ailleurs  $C(0) = 0$  (condition d'arrêt vérifiée dans la fonction qui ne fait donc aucun appel récursif).

(b) Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique de la forme  $u_{n+1} = au_n + b$  avec  $a = 2$ ,  $b = 2$  et  $u_0 = 0$ .

Le terme général d'une telle suite est  $u_n = a^n(u_0 - r) + r$  avec  $r = \frac{b}{1-a}$  et celui de  $C(q)$  est donc

$$C(q) = 2^{q+1} - 2.$$

Or, d'après la relation  $N = 2^q$  on en déduit :  $C(q) = 2(N - 1)$ .

### C5d.

Le calcul de la complexité de TFR n'est pas immédiat du tout (et ne se déduit pas de  $C(q)$ !) puisque chaque appel récursif contient une boucle de longueur variable égale à la longueur de la liste passée en paramètre de la fonction. Le premier appel (non récursif) de la fonction se fait avec une liste de longueur  $N$ , les deux appels suivants avec des listes de longueurs  $N/2$ , les 4 appels suivants avec  $N/4$ , et ce jusqu'à la condition d'arrêt (liste de longueur 1). Le dernier appel récursif conduisant aux boucles « for » se fait avec des listes de longueur 2.

Soit  $D(q)$  le nombre d'itérations total des boucles « for ». On peut écrire  $D(q) = N + 2 \times \frac{N}{2} + 4 \times \frac{N}{4} + \dots + 2^{q-1} \times \frac{N}{2^{q-1}}$ , soit encore  $D(q) = \sum_{k=0}^{q-1} 2^k \times \frac{N}{2^k}$ , c'est à dire

$$D(q) = \sum_{k=0}^{q-1} N \text{ et donc } D(q) = qN, \text{ soit finalement avec } q = \frac{\ln N}{\ln 2}, \quad D(q) = \frac{N \ln N}{\ln 2}.$$

La complexité de TFR est donc en  $\Theta(N \ln N)$ .

Pour les grandes valeurs de  $N$ , la fonction TFR est bien plus efficace que la fonction TF.

## D / Problèmes à résoudre lors de concerts

### D1.

Il s'agit de l'effet Larsen : le signal passe dans une boucle de rétroaction avec amplification. Le son émis par les HP est capté par le micro, puis amplifié, puis réémis plus fort dans les HP, puis à nouveau récupéré par le micro, puis de nouveau amplifié etc. Certaines fréquences sont donc exagérément amplifiées jusqu'à saturation du signal.

Ce phénomène d'amplification successives d'un même signal n'est ici évidemment pas souhaité mais il est parfois recherché en musique (avec une guitare électrique dans des morceaux de rock) ou dans d'autres domaines de la physique (milieu amplificateur d'un LASER par exemple).

### D2.

En utilisant la figure 1 on détermine l'intensité maximale admissible pour le premier rang (seuil de la douleur,  $I_{dBmax} = 100$  dB), et l'intensité minimale pour le rang du fond (zone d'émission de la parole,  $I_{dBmin} = 60$  dB).

En supposant que l'onde est émise par une source ponctuelle, celle-ci est alors sphérique et s'atténue avec la distance du fait d'un effet géométrique (pas d'absorption du son par le milieu) : la puissance totale émise par le HP est répartie sur une surface sphérique de plus en plus grande ( $4\pi r^2$ ). La conservation de la puissance totale portée par l'onde s'écrit alors, en notant  $P$  la puissance totale sonore émise :

$$P = \iint_{\text{sphère}} IdS = 4\pi r^2 I(r), \text{ soit } I(r) = \frac{P}{4\pi r^2} \text{ et donc } I_{dB}(r) = 10 \log \left( \frac{I(r)}{I_0} \right) = I_{dB0} - 20 \log(r),$$

avec  $I_{dB0}$  s'exprimant en fonction de  $P$  et  $I_0$  (détail de l'expression non nécessaire).

Soit  $r_{max} = 50$  m la distance maximale et  $r_{min}$  la distance minimale recherchée.

On peut alors écrire,  $I_{dBmax} = I_{dB0} - 20 \log r_{min}$  (cas des personnes au premier rang) ainsi que  $I_{dBmin} = I_{dB0} - 20 \log r_{max}$  (cas des personnes au dernier rang). Par combinaison de ces deux

équations on obtient :  $r_{min} = r_{max} \times 10^{\frac{I_{dBmin} - I_{dBmax}}{20}}$ . Numériquement :  $r_{min} = 0,50$  m.

On constate qu'il est en effet souvent très désagréable de se trouver à moins d'un mètre environ des haut-parleurs lors d'une telle manifestation.

### D3.

Soient  $I_{dB1} = 65$  dB,  $I_1 = I_0 \times 10^{\frac{I_{dB1}}{10}}$ ,  $I_{dB2} = 80$  dB et enfin  $I_2 = I_0 \times 10^{\frac{I_{dB2}}{10}}$ .

On suppose qu'il faut que l'ensemble des chanteurs produisent une intensité comparable à celle du piano. Puisque les intensités sonores s'ajoutent,  $I_2 = N \times I_1$  si  $N$  est le nombre de chanteurs.

On en déduit alors  $N = \frac{I_2}{I_1} = 10^{\frac{I_{dB2} - I_{dB1}}{10}}$ , soit numériquement,  $N = 10^{\frac{80 - 65}{10}} = 31,6$ .

Il faudra alors 32 chanteurs.

## E / Base de données d'une école de musique

### E1.

Les données **id**, **nom**, **prenom** et **date\_naissance** sont des attributs.

La clé primaire la plus simple est : **id**.

L'opération ensembliste qui ne renvoie que **id** et **nom** est appelée une projection. Son écriture en algèbre relationnelle est :  $\Pi_{id,nom}(eleves)$

La requête correspondante est :

```
SELECT id, nom FROM eleves
```

### E2.

Pour obtenir un nombre entier de plus en plus grand en fonction de la date, on l'écrit sous la forme **aaaammjj**.

La requête correspondante est :

```
SELECT nom, prenom FROM eleves ORDER BY date_naissance ASC
```

### E3.

La requête demandée s'écrit :

```
SELECT id, nom, prenom, date_naissance FROM eleves WHERE date_naissance > 20010000
```

L'opération correspondante (WHERE) s'appelle une sélection ou une restriction.

Son écriture en algèbre relationnelle est :  $\sigma_{date\_naissance > 20010000}(eleve)$ .

### E4.

(a) La requête demandée est :

```
SELECT eleves.nom, eleves.prenom
FROM
    eleves JOIN instruments ON eleves.id = instruments.id_eleve
WHERE instruments.id_instrument = 23
```

ou encore :

```
SELECT eleves.nom, eleves.prenom
FROM
    eleves,
    instruments
WHERE
    instruments.id_instrument = 23
    AND eleves.id = instruments.id_eleve
```

(b) La requête est :

```
SELECT eleves.nom, eleves.prenom
FROM
    eleves JOIN instruments ON eleves.id = instruments.id_eleve
WHERE
    instruments.id_instrument = 23
    AND instruments.date_debut < 2008
```

E5.

La requête s'écrit :

```
SELECT eleves.nom, eleves.prenom
FROM
    eleves JOIN instruments ON eleves.id = instruments.id_eleve
ORDER BY
    (20180514-instruments.date_debut) DESC LIMIT 1
```

## F / Isolation acoustique

F1a.

Dans le cas d'une corde vibrante de longueur  $L$ , le mode propre fondamental (de fréquence minimale) est tel que la longueur d'onde  $\lambda$  vérifie  $L = \frac{\lambda}{2}$  (un seul fuseau sur la corde, un nœud à chaque extrémité, un

ventre au milieu), soit avec  $\lambda = \frac{c}{f}$ ,  $f_{\min} = \frac{c}{2L}$ .

Pour la flûte,  $L = 33$  cm donc  $f_{\min} = 0,52$  kHz.

Pour le trombone,  $L = 2,7$  m donc  $f_{\min} = 63$  Hz.

F1b.

Deux octaves correspondent à un quadruplement de la fréquence, soit pour la flûte,  $f_{\max} = 2,1$  kHz et pour le trombone,  $f_{\max} = 0,25$  kHz.

F2.

À 1000 Hz, la gêne est située à partir de 40 dB et à 125 Hz elle l'est à partir de 45 dB. Il y a donc nécessité des travaux d'isolation pour les deux instruments. Il faut d'ailleurs atténuer l'un comme l'autre de 15 dB supplémentaires par rapport au mur en béton brut.

F3.

Résumons dans un tableau les relevés sur les courbes de la figure 5. Sont reportées les atténuations supplémentaires dues à l'ajout de l'isolant concerné :

	Enduit	Rockmur	Labelrock
Trombone (125 Hz)	8 dB	6 dB	18 dB
Flûte (1000 Hz)	26 dB	20 dB	28 dB

Dans le cas de la flûte seule, toutes les solutions conviennent : on choisit donc la moins chère (rockmur à 8€/m<sup>2</sup>).

Dans le cas du trombone seul, la solution enduit+rockmur convient presque (14 dB d'atténuation), mais la

solution labelrock seul sera la plus efficace tout en étant moins chère.

En jouant des deux séparément on gardera la solution labelrock seul (qui sera aussi efficace pour la flûte). En jouant des deux instruments en même temps, cela ne change rien car comme ils émettent des sons de fréquences très différentes, les sons correspondants seront discriminés par les oreilles et traités séparément par celles-ci.

## DEUXIÈME PARTIE : Les ondes électromagnétiques dans les plasmas

### G / Mise en équation pour des ondes harmoniques

#### G1a.

La charge volumique au sein du plasma est donnée par :

$$\rho = \rho_{\text{ions}} + \rho_{\text{électrons}} = n \times (+e) + n \times (-e) = 0.$$

#### G1b.

Le champ magnétique agit sur les charges selon la force  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ , soit  $F_m \approx qvB$ . Le champ électrique impose la force  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ , soit  $F_e = qE$ . Or pour une onde plane progressive dans le vide on a  $\frac{E}{B} = c$ . L'effet du champ magnétique est négligeable devant celui du champ électrique si  $F_m \ll F_e$ , soit encore si  $vB \ll E$  et donc finalement si  $v \ll c$ . Il faut donc que les particules chargées soient non relativistes.

La loi de la quantité de mouvement s'écrit  $\vec{F} = m\vec{a}$  : l'amplitude du mouvement d'une particule soumise à une force donnée est donc inversement proportionnelle à sa masse. Dans le cas où  $m_e \ll m_i$  le mouvement des ions est négligeable devant celui des électrons.

#### G1c.

Évaluons le rapport poids/force électrique pour un électron plongé dans un champ électrique très faible : on prend par exemple  $E = 1 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Dans ce cas le rapport est  $\frac{mg}{F_e} = 6 \times 10^{-8}$  ce qui est totalement négligeable devant 1.

On peut donc totalement négliger les effets de la pesanteur.

#### G1d.

La loi de la quantité de mouvement appliquée à un électron soumis uniquement à la force électrique  $\vec{F}_e = -e\vec{E}$  s'écrit  $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$ , ce qui en notation complexe donne, avec  $\vec{v}_e = \vec{V}_0 e^{j\omega t}$ ,

$m_e j\omega \vec{v}_e = -e\vec{E}$  et donc  $\vec{v}_e = \frac{-e\vec{E}}{m_e j\omega}$ . Par ailleurs on peut écrire  $\vec{j}_e = \rho_e \vec{v}_e = -ne\vec{v}_e$ , soit

$\vec{j}_e = \frac{ne^2}{m_e j\omega} \vec{E}$ . Par identification :  $\underline{\gamma} = \frac{ne^2}{m_e j\omega}$ . Il s'agit de la conductivité (complexe) du plasma.

#### G2.

Les équations de Maxwell adaptées au plasma sont :

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = 0} \quad (1), \quad \boxed{\text{div} \vec{B} = 0} \quad (2), \quad \boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (3),$$

$$\boxed{\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \underline{\gamma} \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)} \quad (4).$$

### G3.

Grâce à l'équation (1) et la formule du double rotationnel,  $\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$ , qui se transforme à l'aide de (3) en  $\Delta\vec{E} = \frac{\partial \text{rot}\vec{B}}{\partial t}$ , et finalement avec l'équation (4) : on obtient  $\Delta\vec{E} = \mu_0 \left( \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$ ,

soit encore en régime sinusoïdal :  $\Delta\vec{E} = \mu_0 \left( \underline{\gamma} j \omega \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$ . En explicitant l'expression de  $\underline{\gamma}$  et avec

$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$  on obtient finalement :  $\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0} \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$  qui est l'expression demandée si

l'on pose  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e}}$  (pulsation plasma).

Cette expression reste vraie pour une onde non sinusoïdale car les termes en  $\omega$  ont disparu.

## H / Propagation d'une OPPH

### H1.

En injectant l'expression du champ électrique dans l'équation d'onde établie précédemment, on en déduit

$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ . On peut distinguer deux cas :

- $\omega > \omega_p$  :  $\underline{k}$  est alors réel ; il s'agit du domaine de transparence du plasma (propagation sans absorption) ;
- $\omega < \omega_p$  :  $\underline{k}$  est imaginaire pur ; il s'agit du domaine réactif : l'onde est alors évanescence.

### H2.

Dans le domaine réactif,  $\underline{k} = \pm j \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = \pm j k'$ . Dans ce cas le champ électrique s'écrit :

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm k' x} e^{j \omega t}$ .

Une OPPH dans le domaine réactif qui arrive sur le plasma est réfléchi entièrement. Un tel phénomène peut être utilisé pour les communications radio longue distance (réflexion sur l'ionosphère, cf texte d'introduction de la partie H).

### H3.

Dans le domaine de transparence,  $k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ .

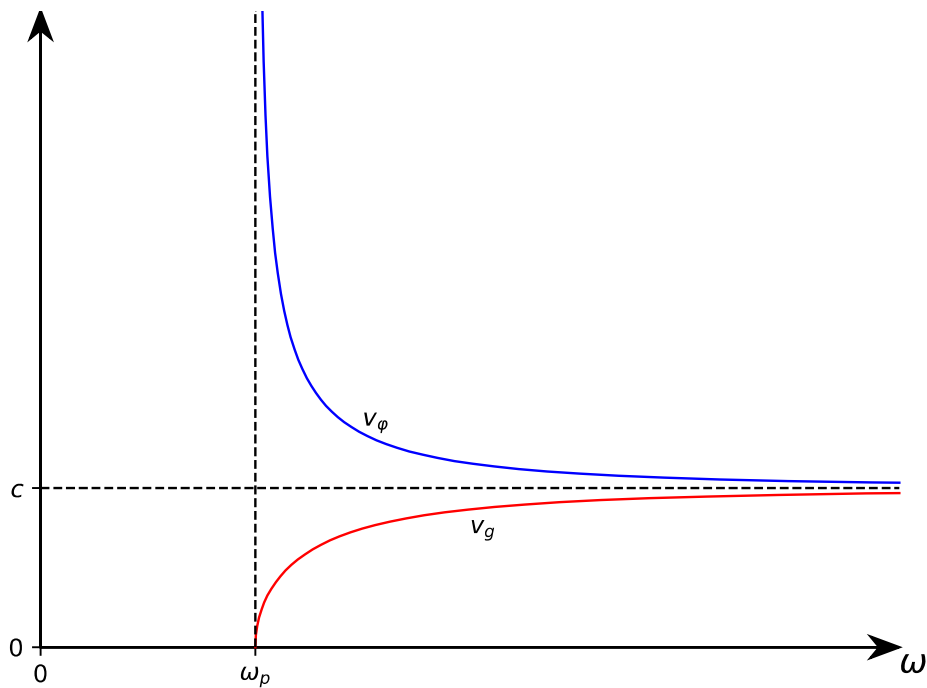
Calculons la vitesse de phase :  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ , soit après calculs,  $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$ .

Calculons la vitesse de groupe :  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ , en différentiant la relation de dispersion donnant  $k^2$  on peut écrire :  $2k dk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$ , soit  $\frac{\omega}{k} \times \frac{d\omega}{dk} = c^2$  qui s'écrit aussi  $v_\varphi \times v_g = c^2$  soit finalement :

$v_g = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$ . Une OPPH dans le domaine de transparence qui arrive sur le plasma voit sa vitesse

de propagation modifiée, est partiellement réfléchi mais une portion de l'énergie est transmise et il y a existence d'une OPPH dans le plasma. Cela permet la communication avec les satellites, situés au-delà de l'ionosphère par rapport à la surface de la Terre.

H4.



Lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $v_\varphi \rightarrow c$  et  $v_g \rightarrow c$  : le milieu n'est plus dispersif et se comporte comme le vide.

### I / Propagation d'un paquet d'ondes émis par une antenne satellite

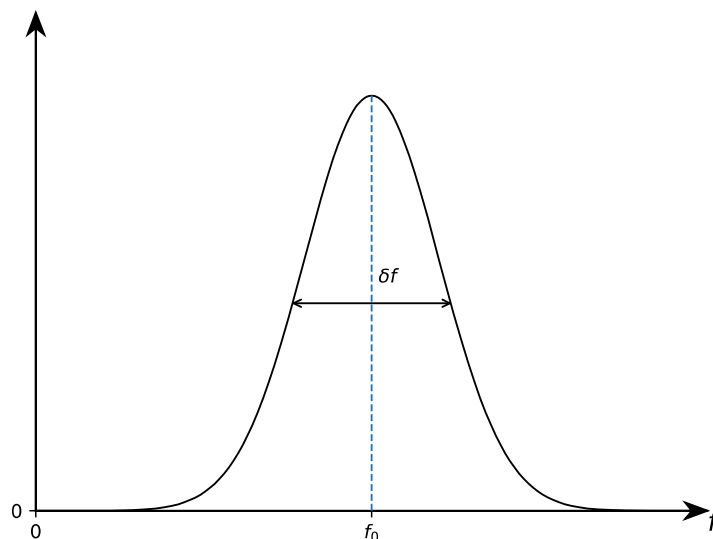
I1.

Pour être rigoureusement harmonique une onde devrait avoir des étendues temporelle et spatiale infinies, ce qui est impossible.

Cette onde peut être considérée comme plane si son amplitude varie peu sur une distance grande devant sa longueur d'onde.

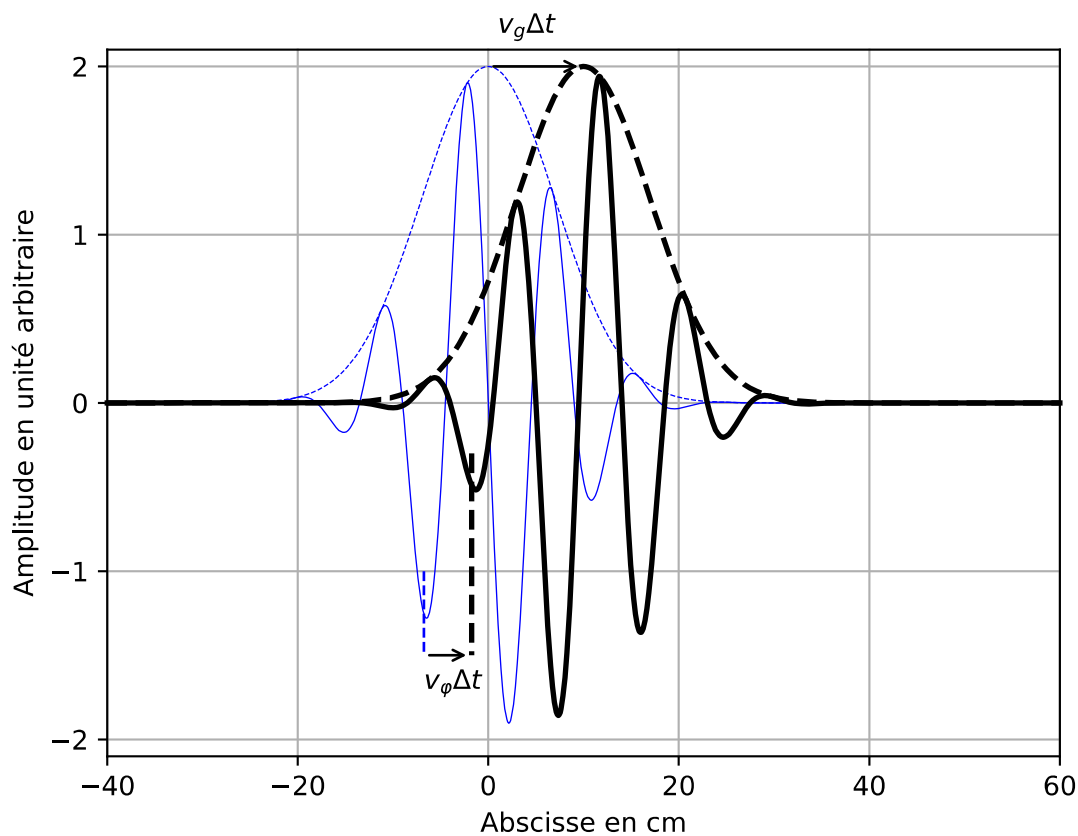
I2.

Le spectre est gaussien, centré sur une fréquence  $f_0$  et de largeur  $\delta f$  inversement proportionnelle à la durée du paquet d'onde.

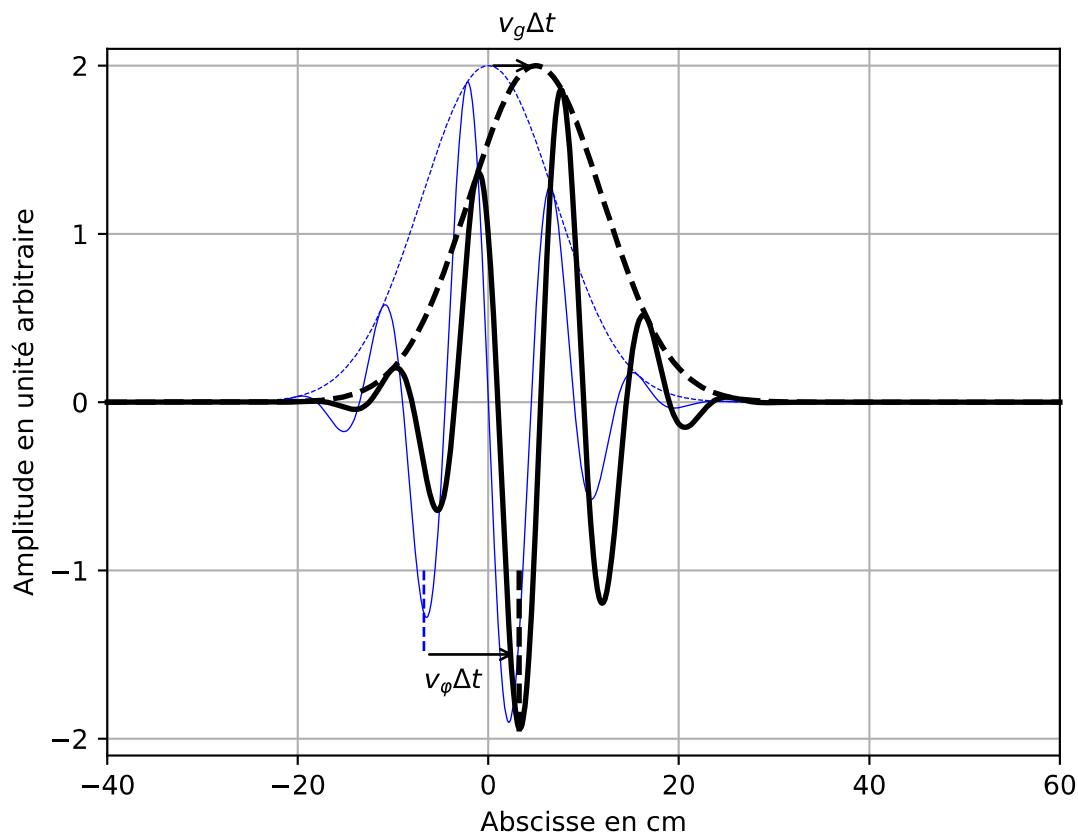


Dans le cas où la vitesse de groupe est le double de la vitesse de phase, l'enveloppe du paquet se déplace

plus vite que les maxima locaux de l'onde : il y a disparition de ces maxima à l'arrière du paquet et apparition à l'avant du paquet.



À l'inverse, lorsque la vitesse de groupe est la moitié de la vitesse de phase, les maxima se propagent plus vite que l'enveloppe elle-même : ils disparaissent alors à l'avant du paquet et apparaissent à l'arrière.



## Synthèse

Dans la première partie ont été étudiées des ondes sonores non harmoniques se propageant dans un milieu non dispersif : le problème principal rencontré est alors d'être capable de traiter correctement toutes les fréquences des harmoniques présents dans le signal (cas de la numérisation, étude de l'isolation sonore...).

Dans la deuxième partie le problème vient surtout du caractère dispersif du milieu de propagation : les composantes du signal de différentes fréquences ne se propagent pas avec la même vitesse, ce qui peut mener à un étalement ou à une déformation du signal.