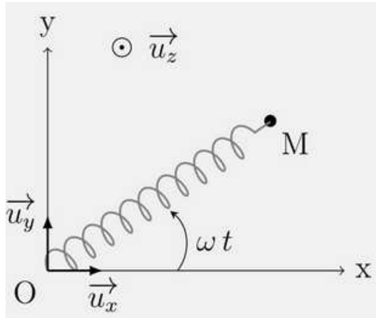
Révisions mécanique

I. Energie potentielle effective

On considère une table à coussin d'air horizontale sur laquelle peut se mouvoir, sans frottement, un mobile autoporteur de masse m accroché à l'extrémité d'un ressort. La table forme le plan Oxy, l'extrémité fixe du ressort est située en O. Ci-contre, un schéma représente le dispositif vu de dessus. Le champ de pesanteur est dirigé suivant $-Oz$ soit $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$. Le ressort a pour constante de raideur k et une longueur à vide l_0.



On étudie le mouvement de M en coordonnées polaires.

1. Justifier la conservation du moment cinétique.

On lance le mobile autoporteur pour lui donner un mouvement de rotation autour de l'axe Oz. On a $\overrightarrow{OM}(t=0) = l_1\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v}(t=0) = l_1\omega\overrightarrow{u_y}$.

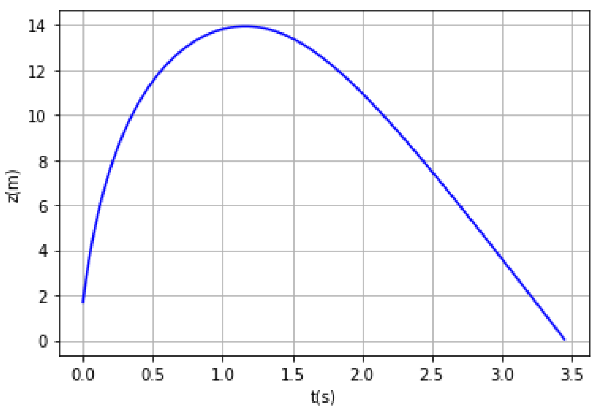
2. Montrer que l'énergie mécanique se conserve et peut se mettre sous la forme $E_m = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + E_{peff}$ où E_{peff} est appelée énergie potentielle effective et est fonction de r, m et de L norme du vecteur moment cinétique. Donner l'expression de E_{peff} .

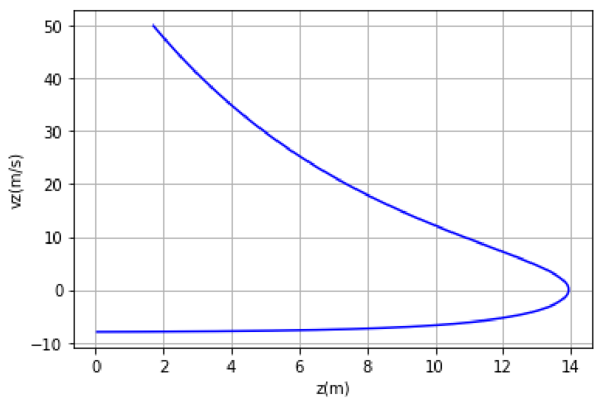
3. La masse peut-elle s'éloigner infiniment du point O? La masse peut-elle passer par le point O au cours de son mouvement? La vitesse peut elle être nulle au cours du mouvement?

Réponses: 2- $E_{peff} = \dfrac{L^2}{2mr^2} + \dfrac{k}{2}(r-l_0)^2$ *3- que des nons!*

II. Volant de badmington

Un joueur de badmington frappe dans un volant avec sa raquette, lui donnant une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_z}$ verticale ascendante. On donne les courbe représentant $z(t)$ et le portrait de phase v_z en fonction de z. Le champ de pesanteur est noté $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$. Données: $g = 9,8\ m.s^{-2}$, $m = 5,0\ g$ (masse du volant).





1. Déduire des courbes les conditions initiales du volant.

2. On modélise l'action de l'air par une force de frottement de la forme $\overrightarrow{F} = -mh||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}$. Justifier ce choix par une estimation du nombre de Reynolds. Donnée: $\eta(air) = 10^{-5}\ Pl$. Déduire de la vitesse limite atteinte, la valeur numérique de h.

3. Déduire du théorème de la puissance mécanique que $\dfrac{d(v^2)}{dz} + 2hv^2 = -2g$ pendant la phase ascendante. En déduire $v(z)$ puis l'altitude z_m atteinte. Vérifier que le résultat trouvé est compatible avec les courbes.

4. Déterminer l'équation vérifiée par v^2 pendant la phase descendante.

Réponses: 2- $h = 0,15\ SI$ *3-* $z_{max} = \dfrac{1}{2h}\ln(1 + \dfrac{v_0^2 h}{g}) + z_0$

III. **Satellites artificiels**

1. Un satellite artificiel est en orbite circulaire basse à l'altitude autour de la Terre de rayon R_T. Exprimer la période orbitale T, la vitesse orbitale v et l'énergie mécanique E_m en fonction des données.

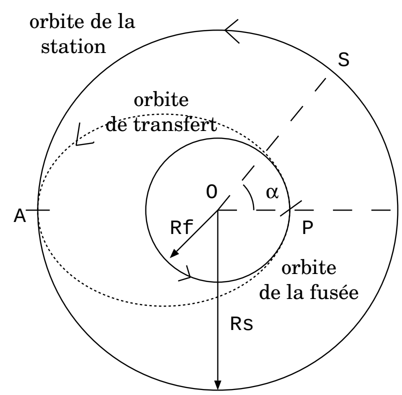
Données: rayon terrestre $R_T = 6380\ km$, $h = 400\ km$ constante géocentrique $k = \mathcal{G}M_T = 398,6.10^3\ km^3.s^{-2}$. Calculer v et T.

2. Un satellite artificiel de la Terre est sur une orbite elliptique telle que l'altitude au périgée vaut $h_P = 500\ km$ et et celle à l'apogée $h_A = 30\ 000\ km$. Calculer le demi-grand axe a, la période orbitale T. Utiliser l'énergie mécanique pour calculer la vitesse du satellite au périgée. Quelle est la particularité de cette vitesse?

Réponses: 1- $v = 7,67\ km.s^{-1}$ *et* $T = 1\ h\ 33\ min$, *2-* $T = 8\ h\ 47\ min$, $v_p = 9,87\ km.s^{-1}$

IV. **Ellipse de transfert**

Une station spatiale décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon R_s. Une fusée de masse m se trouve en orbite circulaire de rayon R_f autour de la Terre de masse M_0. On souhaite que la fusée rejoigne la station spatiale. Pour cela on réalise la manoeuvre suivante : à l'instant t_1, la station spatiale se trouve en un point noté S et la fusée se trouve en un point noté P. On note α l'angle entre OS et OP où O désigne le centre de la Terre. On modifie instantanément la vitesse de la fusée en norme (sans modifier sa direction) de sorte à placer la fusée sur une orbite elliptique appelée ellipse de transfert d'Hohmann. La fusée rejoint la station spatiale à l'instant t_2 en un point noté A.



1. Démontrer, dans le cas d'une orbite circulaire l'expression de la 3ième loi de Kepler. En déduire l'expression de la 3ième loi de Képler pour une orbite elliptique.

2. Exprimer les énergies mécaniques E et E' de la fusée sur l'orbite respectivement circulaire de rayon R_f puis sur l'orbite elliptique. Exprimer la vitesse v' de la fusée en P sur l'orbite elliptique. En déduire la variation de vitesse de la fusée en P à l'instant t_1.

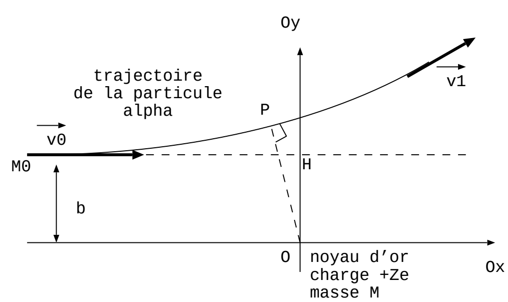
3. Exprimer le temps la durée du transfert $t_2 - t_1$.

4. Exprimer la valeur de α pour que la fusée rencontre la station en A.

Réponses : 1- $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}M_0}}$ *2-* $\Delta v = v' - v = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{G}M_0 R_s}{R_f(R_f + R_s)}} - \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_0}{R_f}}$ *4-* $\alpha = \pi(1 - (\dfrac{R_f + R_s}{2R_s})^{3/2})$

V. **Expérience de Rutherford**

Une particule alpha (masse m et charge $+2e$) est émise à l'infini avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$. Elle se dirige vers un noyau cible d'atome d'or fixe placé en O (masse M et charge $+Ze$). La distance b entre le support de la vitesse initiale et la droite passant par O parallèle à $\overrightarrow{v_0}$ est appelée paramètre d'impact. Soumise à la répulsion coulombienne, la particule alpha décrit une branche d'hyperbole (état libre). On note $\overrightarrow{v_1}$ la vitesse de la particule alpha lorsqu'elle s'éloigne du noyau.

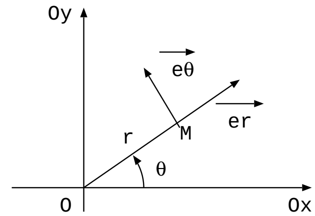


1. Quelle grandeur physique scalaire se conserve au cours du temps? Justifier votre réponse et en déduire une relation entre v_0 et v_1.

2. Quelle grandeur physique vectorielle se conserve? Justifier votre réponse et en déduire que le mouvement de la particule alpha est plan.

On repère la position de la particule alpha par ses coordonnées polaires.

3. Utiliser le moment cinétique de M par rapport à O pour trouver la relation entre $r^2\dot{\theta} = -bv_0$. Aide: pensez à écrire $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_0}$.

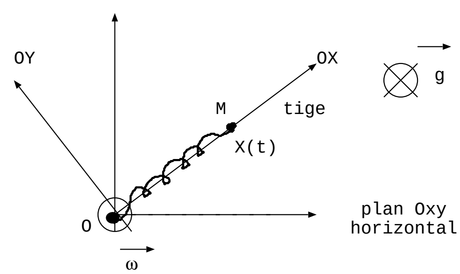


4. Exprimer l'énergie mécanique de la particule alpha en fonction de r, $\dot{r}$ et des données. Définir et exprimer l'énergie potentielle effective. Représenter l'énergie mécanique et l'énergie potentielle effective sur un même graphe. En déduire la distance minimale d'approche de la particule alpha $r = OP$.

Réponses: 1- $v_1 = v_0$ *3-* $r^2\dot{\theta} = -bv_0$ *4-* $r = OP$ *est solution de* $r^2 + \dfrac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2} r - b^2 = 0$

VI. **Ressort en rotation**

Sur une tige, peut coulisser sans frottement une masselotte M de masse m accrochée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. La tige tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical Oz. La position de la masselotte sur la tige est repérée par $x(t)$. On réalise l'étude dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la tige.



1. Faire un bilan des forces exercées sur M dans $\mathcal{R}'$, en déduire l'équation différentielle vérifiée par $X(t)$.

2. Déduire de l'équation différentielle vérifiée par $X(t)$, la position d'équilibre X_e de la masselotte dans $\mathcal{R}'$ et la condition $(*)$ sur ω pour que M oscille sur la tige.

Lorsque la condition $(*)$ est vérifié, la masselotte est envoyée depuis sa position d'équilibre, à l'instant $t = 0$ avec une vitesse relative v_0 selon $+\overrightarrow{e_X}$. Exprimer $X(t)$ en fonction de X_e, v_0, ω, k, m et t.

Réponses : $X_e = \dfrac{l_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}$, $X(t) = X_e + \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\Omega t)$ *avec* $\Omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \omega^2}$

VII. **Effet de la rotation de la Terre**

Un point matériel M de masse m est lancé depuis le point O, vers le haut selon la verticale ascendante Oz d'un lieu de latitude λ, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_z}$. On note $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur de rotation instantanée de la Terre. On note Ox la direction tangente à un méridien dirigée vers le sud et Oy la direction tangente à un parallèle dirigée vers l'est.

1. Dans un premier temps, on suppose le référentiel terrestre galiléen. Donner l'altitude maximale atteinte par la masse et l'expression de son vecteur vitesse en fonction du temps. En quel point retombe le point matériel.

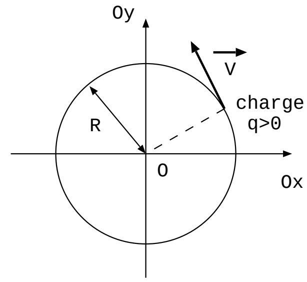
2. On recherche à déterminer la déviation observée lorsque le point retombe sur Terre. On abandonne l'hypothèse de référentiel terrestre galiléen et on tient compte de la rotation de la Terre sur elle-même. En considérant que la force d'inertie de Coriolis s'exprime en utilisant la loi de vitesse déterminée dans la question précédente, donner une évaluation de cette déviation en précisant sa direction et son sens.

Application Numérique : on prendra $\lambda = 51^0$ pour une altitude maximale atteinte de 100 m.

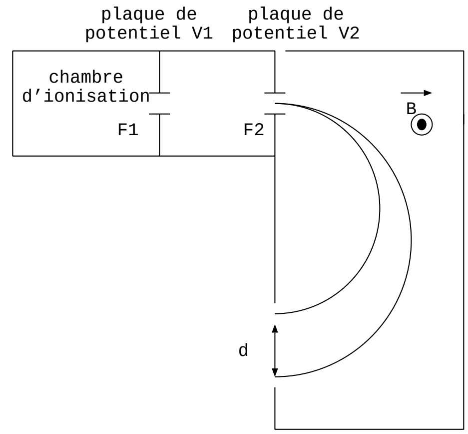
Réponses: 1- $h_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$ *et* $\overrightarrow{v}(t) = (v_0 - gt)\overrightarrow{e_z}$ *2-* $\Delta y = -\dfrac{4\Omega\cos\lambda v_0^3}{3g} = -5,7\ cm.$

VIII. **Spectrographe de masse**

1. Une particule de charge q positive décrit un mouvement circulaire de rayon R sous l'action d'un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ constant. Ajoutez sur le schéma le sens de $\overrightarrow{B}$ en justifiant votre réponse et montrer que le rayon du cercle est $R = \dfrac{mV}{qB}$.



2. Pour séparer les deux isotopes naturels de l'uranium, l'uranium 235 et l'uranium 238, il est envisagé un spectrographe de masse. Cet appareil comporte trois parties. Les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en ions U^+ de charge $+e$ d'où ils sortent par la fente F_1 avec une vitesse négligeable. Ces ions sont accélérés par un champ électrique uniforme imposé par une tension $U = V_1 - V_2$ entre deux plaques P_1 et P_2. Enfin les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ avec $B = 0,1\ T$ perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2.



Données : $m_{U5} = 235.1,67.10^{-27}\ kg$ et $m_{U8} = 238.1,67.10^{-27}\ kg$ et $e = 1,60.10^{-19}\ C$.

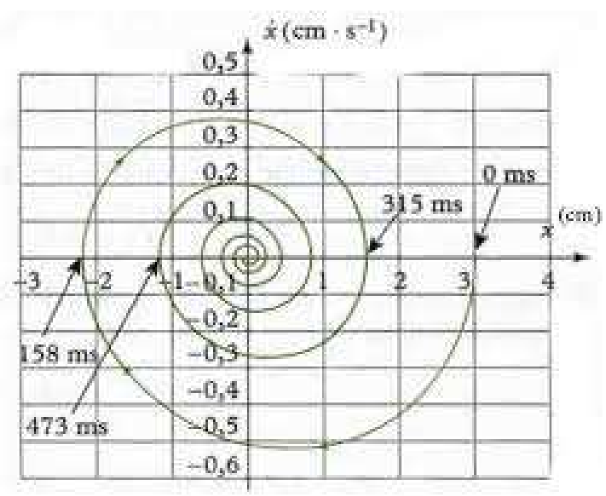
Prévoir le signe de U et calculer la tension U pour que la distance entre les collecteurs soit égale à $d = 2\ cm$.

Réponse : $U = 5,04\ kV$

IX. **Utilisation du portrait de phase**

Un oscillateur vérifie l'équation différentielle $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$.

On donne son portrait de phase soit le graphe représentant $\dot{x}$ en fonction de x. En déduire l'allure de $x(t)$ et nommer le régime observé. Préciser les valeurs numériques de x_e, $x(t=0)$, $v(t=0) = \dot{x}(t=0)$ et la pseudo-période T.



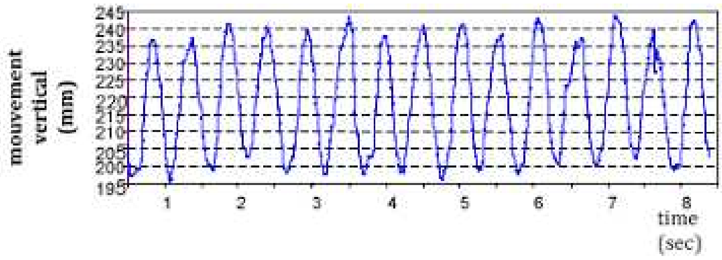
Déterminer la solution $x(t)$ de l'équation différentielle en fonction de deux constantes d'intégration que nous ne chercherez pas à exprimer. On définit le décrément logarithmique par $\delta = \ln(\dfrac{x(t) - x_e}{x(t+T) - x_e})$. Exprimer δ en fonction de T, Q et ω_0.

Simplifier δ en faisant l'hypothèse $\omega \approx \omega_0$. Déduire de l'étude les valeurs numériques de δ, ω_0 et Q.

Réponses: $\delta = 0,7,\ Q \approx 5$ *et* $\omega_0 \approx 20\ rad.s^{-1}$

X. **Modélisation de la marche d'un joggeur**

Lorsqu'on enregistre grâce à des marqueurs le déplacement en 3 dimensions du torse humain, on remarque que le déplacement le plus significatif est le mouvement vertical de la hanche. On fournit le relevé en laboratoire de l'altitude $Z_e(t)$ (mm) de la hanche lors de la marche d'un homme à 5 km/h sur un tapis roulant en fonction du temps (en s).



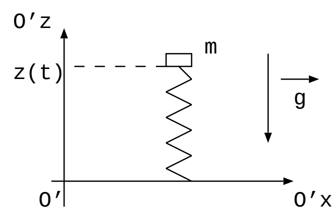
En vue de la modélisation, on assimile le mouvement vertical de la hanche à un déplacement purement sinusoïdal : $Z_e(t) = Z_e \cos(\omega t) + Z_{moy}$ (on fera abstraction de la position de l'origine des temps).

1. Déterminer graphiquement la valeur moyenne Z_{moy}, l'amplitude Z_e du mouvement, la période T et en déduire la pulsation ω.

Lorsque l'homme marche, il entraine un système de récupération d'énergie disposé sur sa hanche. Le référentiel mobile $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié à la hanche de l'homme est en translation dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. La position de O' dans $\mathcal{R}$ est repérée par $Z_e(t) = Z_e \cos(\omega t) + Z_{moy}$. Sa vitesse selon $\overrightarrow{e_x}$ est uniforme.

2. Le référentiel mobile $\mathcal{R}'$ est il galiléen? Exprimer l'accélération d'entrainement de $\mathcal{R}'$ en fonction de Z_e, ω, t et d'un vecteur de base.

Le générateur est constitué d'un empilement cylindrique d'aimants au milieu duquel oscille une bobine lorsque l'homme marche. Le mobile bobine + masse de masse totale m est en suspension sur un ressort que l'on supposera parfait, de raideur k et de longueur à vide l_0. Dans le référentiel mobile $\mathcal{R}'$, on note $z(t)$ la position du mobile par rapport à O, le point d'attache du ressort et $V(t)$ sa vitesse.



Afin de prendre en compte la conversion d'énergie mécanique-électrique, on modélisera l'interaction électromagnétique agissant sur le mobile bobine + masse par une force de la forme $\overrightarrow{F} = -\alpha \overrightarrow{V}$.

3. On note z_{eq} la position d'équilibre du mobile bobine + masse lorsque $\mathcal{R}'$ est fixe dans $\mathcal{R}$. Exprimer z_{eq} en fonction de m, g, k et l_0.

4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.

On note $Z(t) = z(t) - z_{eq}$ la position du mobile bobine + masse par rapport à sa position d'équilibre z_{eq}.

5. Montrer que l'équation différentielle du mouvement du mobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$ se met sous la forme: $\ddot{Z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega^2 Z_e \cos(\omega t)$.

Exprimer ω_0 et Q en fonction de m, k et α.

On étudie dans la suite le régime sinusoïdal forcé imposé par la marche de l'homme à la pulsation ω, soit $Z(t) = Z_m \cos(\omega t + \phi)$. On note: $\underline{Z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z}_m = Z_m e^{j\phi}$.

6. Exprimer $\underline{Z}_m$ en fonction de Z_e, ω, ω_0 et Q. Ce système se comporte comme un filtre, préciser sa nature.

Réponses: $z_e = l_0 - \dfrac{mg}{k}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ *et* $Q = \dfrac{\sqrt{mk}}{\alpha}$, $\underline{Z}_m = \dfrac{-Z_e}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - j\frac{\omega_0}{Q\omega}}$.