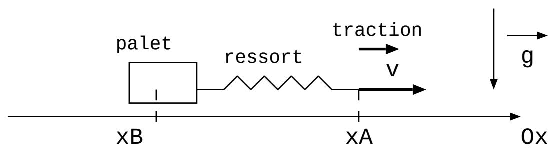
Collé-Glissé

Notations:



m: masse du palet, k et l_0: constante de raideur et longueur à vide du ressort

f_s et f_d coefficients de frottements statique et dynamique

$x_B(t)$: position du palet

$x_A(t)$: position de l'extrémité du ressort tiré par la machine avec $\dot{x}_A = v$: vitesse de traction (vitesse à laquelle on fait avancer l'extrémité du ressort)

$X(t) = x_A(t) - x_B(t) - l_0$: allongement du ressort

On a donc $\dot{X} = v - \dot{x}_B$ et $\ddot{X} = -\ddot{x}_B$

.

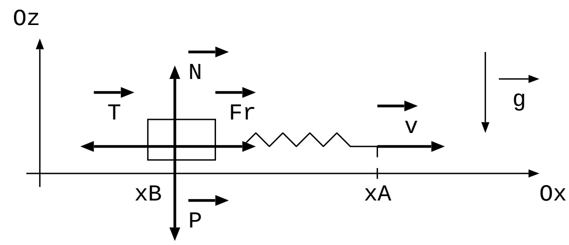
Phase où le palet est immobile:

$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$

avec $\overrightarrow{F_r} = +k(l - l_0)\overrightarrow{e_x} = kX\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{e_x}$.

On projette sur Ox: $T = kX$

On projette sur Oz: $N = mg$



La palet est immobile tant que $T \leq f_s N$ soit $kX \leq f_s mg$ ou encore $X \leq \dfrac{f_s mg}{k}$.

Phase où le palet est mobile:

Le palet démarre à $t = 0$: le conditions initiales sont $x_B(t = 0) = 0$, $X(t = 0) = \frac{f_s mg}{k}$ et $\dot{X}(t = 0) = v - 0$

On projette la RFD sur Ox: $m\ddot{x}_B = -T + kX = -m\ddot{X}$ soit à résoudre $\ddot{X} + \dfrac{k}{m}X = \dfrac{T}{m}$

On projette la RFD sur Oz: $N = mg$

Le palet glisse donc $T = f_d N = f_d mg$ soit à résoudre $\ddot{X} + \omega_0^2 X = f_d g$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

On a donc $X(t) = \dfrac{f_d g}{\omega_0^2} + A\cos(\omega_0 t + \phi)$

On applique les CI: $X(t = 0) = \dfrac{f_d g}{\omega_0^2} + A\cos\phi = \dfrac{f_s g}{\omega_0^2}$ et $\dot{X}(t = 0) = v = -\omega_0 A \sin\phi$. Ce qui donne $A\cos\phi = \dfrac{(f_s - f_d)g}{\omega_0^2}$ et $A\sin\phi = \dfrac{v}{\omega_0}$.

Soit $A^2\cos^2\phi + A^2\sin^2\phi = A^2 = (\dfrac{(f_s - f_d)g}{\omega_0^2})^2 + (\dfrac{v}{\omega_0})^2$ soit $A = \sqrt{(\dfrac{(f_s - f_d)g}{\omega_0^2})^2 + (\dfrac{v}{\omega_0})^2}$

Et $\tan\phi = \dfrac{v\omega_0}{(f_s - f_d)g}$.

Ainsi $X_{max} = \frac{f_d g}{\omega_0^2} + A = \frac{f_d g}{\omega_0^2} + \sqrt{(\frac{(f_s - f_d)g}{\omega_0^2})^2 + (\frac{v}{\omega_0})^2}$

et $X_{min} = \frac{f_d g}{\omega_0^2} - A = \frac{f_d g}{\omega_0^2} - \sqrt{(\frac{(f_s - f_d)g}{\omega_0^2})^2 + (\frac{v}{\omega_0})^2}$

La solution $X(t) = \dfrac{f_d g}{\omega_0^2} + A\cos(\omega_0 t + \phi)$ donne $\dot{X} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$, ce qui implique $(X(t) - \dfrac{f_d g}{\omega_0^2})^2 + (\dfrac{\dot{X}}{\omega_0})^2 = A^2 = (\dfrac{(f_s - f_d)g}{\omega_0^2})^2 + (\dfrac{v}{\omega_0})^2$ (équation $*$).

Le palet glisse puis s'immobilise à l'instant t_1. A cet instant on a $\dot{X}(t_1) = v$

D'après la relation $*$, cela donne $(X(t_1) - \dfrac{f_d g}{\omega_0^2})^2 = (\dfrac{(f_s - f_d)g}{\omega_0^2})^2$ soit $X(t_1) - \dfrac{f_d g}{\omega_0^2} = \pm\dfrac{(f_s - f_d)g}{\omega_0^2}$ soit

$X(t_1) = \frac{(2f_d - f_s)g}{\omega_0^2}$ et $X(t_1) = \frac{f_s g}{\omega_0^2}$ (solution à exclure, ça c'est $X(t=0)$).

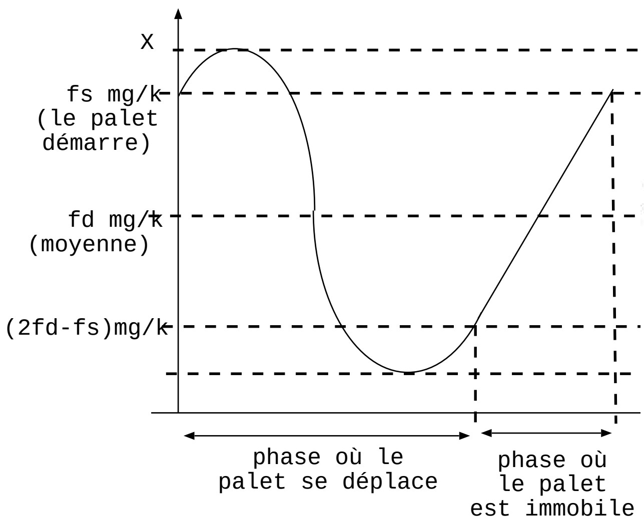
Donc $X(t_1) = \frac{(2f_d - f_s)g}{\omega_0^2}$.

Récapitulatif:

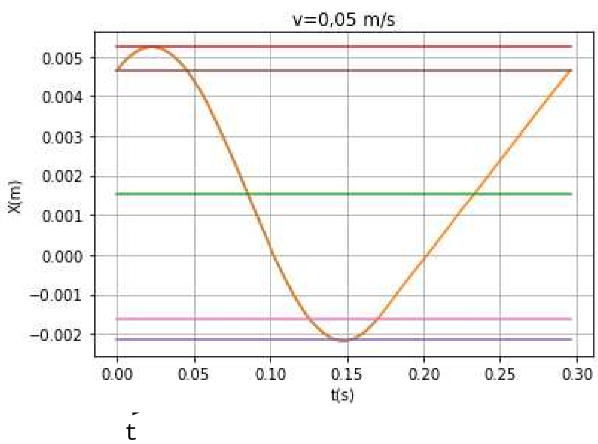
Dans la phase où ça oscille: la valeur moyenne de X est $X_{moy} = \frac{f_d g}{\omega_0^2}$ et l'amplitude des oscillations est $A = \sqrt{(\frac{(f_s - f_d)g}{\omega_0^2})^2 + (\frac{v}{\omega_0})^2}$. Les oscillations commencent lorsque $X \leq \frac{f_s mg}{k}$ et s'arrêtent lorsque $\dot{X} = v$ (à ce moment $X = \frac{(2f_d - f_s)mg}{k}$).

Le palet s'immobilise pour $X = \frac{(2f_d - f_s)g}{\omega_0^2}$ ou $X = \frac{f_s g}{\omega_0^2}$.

Courbe théorique

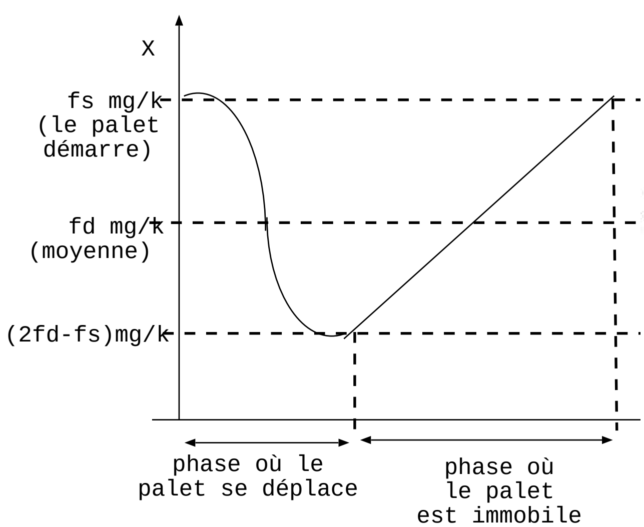


Simulation

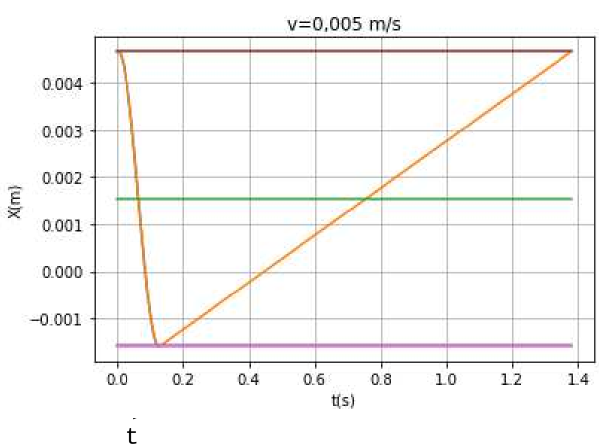


Lorsque la vitesse de traction est faible ou que la constante de raideur du ressort est faible, l'amplitude des oscillations est proche de $(f_s - f_d)\frac{mg}{k}$.

Courbe théorique



Simulation



Code python pour tracer les courbes:

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np


omega0=8*np.pi #omega=(k/m)^1/2
v=0.005 #vitesse de traction de l'avant du ressort
fs=0.3 #coefficient de frottement statique
fd=0.1 #coefficient de frottement dynamique
m=0.5 #masse du palet
g=9.8
k=m*omega0**2 #constante de raideur du ressort
X0=fs*m*g/k #Pour X<X0 le palet est immobile pour X>X0 le palet glisse
dX0=v #quand le palet est immobile, X=v
Xmoy=fd*m*g/k #valeur moyenne des oscillations
A=((v/omega0)**2+(g*(fs-fd)/omega0**2)**2)**0.5 #amplitude des oscillations
#phase 1: le solide glisse, le ressort est tendu
#X(t=0)=fsmg/k et X'(t=0)=v
t=[0]
lX=[X0]
ldX=[dX0]
i=0
dt=2*np.pi/omega0/1000
while ldX[i]<=dX0 and i<1000: #la pahse 1
    t.append(t[i]+dt)
    a=fd*g-omega0**2*lX[i] #accélération: le palet bouge, ressort tensdu
    ldX.append(ldX[i]+a*dt) #v(ti+1)
    lX.append(lX[i]+ldX[i]*dt) #X(ti+1)
    i=i+1
```

```python
plt.plot(t,lX)
#plt.show()

N1=len(t) #valeur de N à la fin de la phase 1
#phase 2: le palet est arrêté et le ressort est détendu
i=N1-1
while lX[i]<X0 and i<15500:
    t.append(t[i]+dt)
    ldX.append(v) #le palet est immobile dX/dt=v
    lX.append(v*(t[i]-t[N1-1])+lX[N1-1])
    i=i+1
N2=len(t)
plt.plot(t,lX) #courbe X(t)
plt.plot([t[0],t[N2-1]],[Xmoy,Xmoy]) #asymptote horizontale qui correspond à Xmoy
plt.plot([t[0],t[N2-1]],[Xmoy+A,Xmoy+A]) #asymptote horizontale qui correspond à Xmax
plt.plot([t[0],t[N2-1]],[Xmoy-A,Xmoy-A]) #asymptote horizontale qui correspond à Xmin
plt.plot([t[0],t[N2-1]],[X0,X0]) #valeur de X au démarrage
plt.plot([t[0],t[N2-1]],[lX[N1-1],lX[N1-1]]) #valeur de X à l'arrêt
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('X(m)')
plt.title('v=0,005 m/s')
plt.grid()
plt.show()
```