# Révisions d'électromagnétisme

## I. **Puissance d'un laser**

Un laser émet un faisceau cylindrique dans lequel se propage une onde progressive plane harmonique polarisée rectilignement. Le laser a une puissance $P$ et la section droite du faisceau a pour aire $S$. Déterminer les amplitudes $E_0$ et $B_0$ des champs électrique et magnétique. AN: $P = 3\ mW$, $S = 2\ mm^2$ et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ SI$.

*Réponse:* $E_0 = 1,07.10^3\ V.m^{-1}$

## II. **Décharge d'une boule**

Une boule conductrice de rayon $R$, uniformément chargée en volume, est abandonnée avec une charge $q_0$ dans l'air. L'air est supposé faiblement conducteur de conductivité $\gamma$, de densité volumique de charges nulle et de vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$.

**1.** Montrer par symétrie que $\overrightarrow{E}$ est radial et ne dépend que de la distance $r$ au centre de la boule. Montrer que $\overrightarrow{B}$ est nul.

**2.** Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\rho$ puis par $q(t)$ et exprimer $q(t)$ en fonction de $q_0$, $\gamma$, $\epsilon_0$ et $t$. Pourquoi les expériences d'électrostatiques sont elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide?

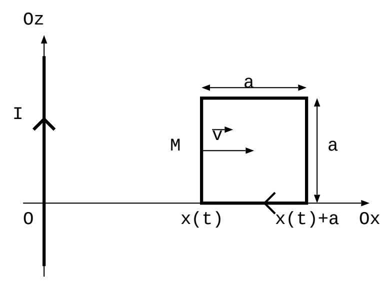
**3.** Exprimer $E(r,t)$ en fonction de $q(t)$, $\epsilon_0$ et $r$ présent à l'intérieur et à l'extérieur de la boule. En déduire le vecteur densité de courant à l'intérieur et à l'extérieur de la boule.

*Réponses: 2-* $q(t) = q_0 e^{-\gamma t/\epsilon_0}$ *3-* $\overrightarrow{j}(r < R, t) = \dfrac{\gamma q(t) r}{4\pi R^3 \epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$ *et* $\overrightarrow{j}(r > R, t) = \dfrac{\gamma q(t)}{4\pi r^2 \epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$

## III. **Induction**

Un fil rectiligne illimité est parcouru par un courant d'intensité $I$ constante. Soit $Ox$ un axe perpendiculaire au fil. Un cadre de coté $a$ est en translation dans le plan défini par le fil et l'axe, un coté restant toujours sur l'axe. A $t$ le sommet M est en $x$ avec la vitesse $v$.

Le cadre étant orienté comme l'indique la figure, exprimer, en fonction de $a$, $\mu_0$, $I$, $x$ et $v$, la fem induite qui apparaît dans le cadre.




*Réponse:* $e = +\dfrac{\mu_0 I a^2}{2\pi}\dfrac{v}{x(x+a)}$

## IV. **Onde dans un plasma**

Un plasma est constitué d'ions positifs de charge $+e$, de masse $M$ et d'électrons de charge $-e$, de masse $m << M$. Les densités volumiques des ions et des électrons sont égales, on la note $n$. Les ions sont supposés immobiles et les électrons possèdent une vitesse $\overrightarrow{v}$. L'ensemble est plongé dans un champ électrique qui s'écrit en cartésiennes: $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{i(\underline{k}x - \omega t)}\overrightarrow{e_y}$.

**1.** Quel est l'argument pour considérer les ions immobiles ?

**2.** Etablir la relation entre la représentation complexe de la vitesse $\underline{\overrightarrow{v}}$, $\underline{\overrightarrow{E}}$ et les données de l'exercice. En déduire l'expression (en notation complexe) de la densité volumique de courant $\underline{\overrightarrow{j}}$.

**3.** Établir la relation de dispersion en considérant que le plasma possède la permittivité et la perméabilité du vide. A quelle condition a-t-on propagation?

*Réponses: 2-* $\underline{\overrightarrow{j}} = -\dfrac{ne^2}{i\omega m}\underline{\overrightarrow{E}}$ *3-* $\omega > \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

## V. **Onde électromagnétique**

On étudie une onde électromagnétique entre les plans $z = 0$ et $z = a$, et dont le champ électrique est de la forme : $\overrightarrow{E} = E_0 \sin(\frac{\pi z}{a}) \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y}$

**1.** Quels sont la direction et le sens de propagation ? L'onde est-elle plane, polarisée ? Justifier.

**2.** Exprimer $k$ en fonction de $\omega$. Exprimer la vitesse de phase de l'onde. Discuter.

**3.** Quelle démarche proposez vous pour obtenir le champ magnétique de l'onde ? Aucun calcul n'est demandé.

*Réponse:* $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$

## VI. **Onde dans un métal**

Une onde harmonique progressive de fréquence $f = 1\ MHz$, d'amplitude $E_0$, polarisée rectilignement selon $Oy$, se propage selon $Ox$, dans le sens des $x$ croissants, dans le demi espace $x > 0$ occupé par un matériau conducteur de conductivité $\gamma = 10^7\ S.m^{-1}$, de permittivité $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\ F.m^{-1}$ et de perméabilité $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$.

On pose $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}y)}\overrightarrow{e_x}$

**1.** Déterminer l'équation de dispersion donnant $\underline{k}^2$ en fonction des données.

**2.** Simplifier cette équation compte tenu de la valeur de la fréquence.

**3.** En déduire l'expression réelle de $\overrightarrow{E}$ et interpréter le résultat.

*Réponse:* $\overrightarrow{E} = E_0 e^{-y/\delta} \cos(\omega t - \frac{y}{\delta})\overrightarrow{e_x}$ *avec* $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

## VII. **Théorème d'Ampère**

L'espace compris entre deux cylindres de même axe $Oz$, de hauteur $h$ et de rayons $R_1$ et $R_2 > R_1$ est rempli par des courants dont le vecteur densité s'écrit $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_\theta}$ avec $j$ une constante positive. On néglige les effets de bord.

**1.** Montrer que le champ magnétique est de la forme $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\overrightarrow{e_z}$. Préciser la forme des lignes de champ.

**2.** On admet que le champ magnétique extérieur est nul. Déduire du théorème d'Ampère, l'expression de $B(r)$ pour $r < R_1$ et pour $R_1 < r < R_2$.

**3.** Retrouver le résultat en utilisant l'équation de Maxwell- Ampère. On donne: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{A} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\overrightarrow{e_z}$.

*Réponses: 2-* $B(r < R_1) = \mu_0 j(R_2 - R_1)$ *et* $B(R_1 < r < R_2) = \mu_0 j(R_2 - r)$

## VIII. **Pression au centre de la Terre**

On modélise la Terre par une sphère homogène de masse volumique constante $\rho$, de rayon $R_T$ et de masse totale $M_T$. Données: $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ SI$, $M_T = 6,0.10^{24}\ kg$ et $R_T = 6400\ km$.

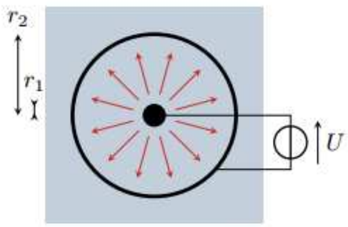
**1.** Déduire de l'analogie électrostatique-gravitation, l'énoncé du théorème de Gauss pour la gravitation. En déduire le champ gravitationnel $\overrightarrow{g}(r)$ à l'intérieur de la Terre.

**2.** Rappeler la relation de la statique des fluides et déduire de la question précédente que $\frac{dP}{dr} = -\alpha r$. Exprimer $\alpha$ en fonction de $\rho$ et $\mathcal{G}$.

**3.** Déterminer la pression au centre de la Terre $R_T$, $M_T$ et $\mathcal{G}$. La valeur communément admise de cette pression est 380 $GPa$, commenter.

*Réponses: 2-* $\alpha = \frac{4\pi\rho^2\mathcal{G}}{3}$ *3-* $P(r = 0) = 170\ GPa$

## IX. **Electrolyseur**




L'électrode de travail et la contre-électrode d'un électrolyseur sont constituées de deux cylindres coaxiaux de rayons $r_1 < r_2$ plongeant sur une hauteur $h$ dans une solution électrolytique de conductivité $\sigma$ supposée uniforme et constante. Une tension $U = V(r_1) - V(r_2) > 0$ est imposée entre les deux électrodes. On suppose le régime stationnaire atteint. La densité de courant dans la solution s'écrit alors sous la forme

$$\vec{j} = j(r)\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad j(r) > 0\,.$$

**1 -** En procédant à un bilan de charge sur une couche cylindrique comprise entre les rayons $r$ et $r + \mathrm{d}r$ ($r_1 < r < r + \mathrm{d}r < r_2$), montrer que l'intensité $I$ qui traverse un cylindre de rayon $r$ ne dépend pas de $r$.

**2 -** En déduire l'expression de $j(r)$ en fonction de $I$, $r$ et $h$, puis celle du champ électrique $\vec{E}$ au sein de la solution électrolytique.

**3 -** Établir l'expression de la résistance $R$ de la portion de solution comprise entre les deux électrodes.

**4 -** Déterminer la puissance totale dissipée par effet Joule dans la solution en fonction du courant $I$ d'électrolyse.

*Réponse:* $R = \dfrac{1}{2\pi h\sigma}\ln(\dfrac{r_2}{r_1})$

## X. **La foudre**

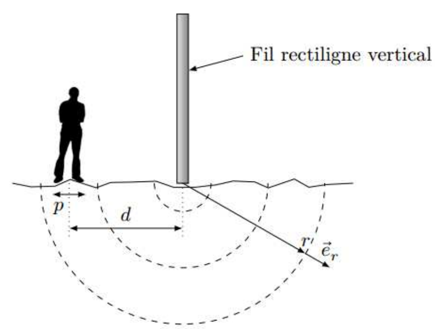
On modélise un éclair par un fil rectiligne de rayon $R \approx 1,5\ cm$ et de longueur $l = 500\ m$ parcouru par un courant d'intensité $I = 10kA$ allant des nuages jusqu'au sol pendant un durée $\Delta t = 25\ ms$. En dessous des nuages orageux, il se forme un champ électrique d'environ 20 000 $V/m$. Données: $e = 1,6.10^{-19}\ C$

**1.** Lorsque la foudre tombe, quel est le nombre d'électrons allant du nuage vers le sol ?

**2.** Quelle conductivité électrique pourrait-on attribuer à l'air dans ces conditions ?

**3.** Quelle est l'ordre de grandeur de l'énergie dissipée lors d'un éclair ?

Par temps orageux, il peut être dangereux de chercher à s'abriter près d'un arbre. L'éclair traversant l'arbre est modélisé par le fil rectiligne vertical décrit précédemment qui prend fin au niveau du sol, où l'on suppose que la densité volumique de courant est radiale, de la forme $\vec{j_s} = j_s(r,t)\vec{e_r}$. On note $\gamma_s$ la conductivité électrique du sol.




**4.** Exprimer le champ électrique $\vec{E_s}$ dans le sol.

**5.** Un être humain se trouve à la distance moyenne $d$ de l'arbre et la distance entre ses deux pieds est $p$. Déterminer l'expression, en fonction de $p$ et $d$, des potentiels au niveau des pieds de l'être humain. En déduire l'expression de la différence de potentiel entre les pieds $U_p$ appelée tension de pas. Données: $p = 50\ cm$, $d = 1\ m$ et $\gamma_s = 1,5\ S.m^{-1}$.

*Réponses: 1-* $N = 1,56.10^{21}$ *électrons 2-* $\gamma = 707\ S.m^{-1}$ *3-* $E = 2,5.10^9\ J$ *5-* $U_p = \dfrac{Ip}{2\pi\gamma_s(d^2 - (p/2)^2)} = 1400\ V$

## XI. **Aimantation du cobalt**

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron de masse $m$ et de charge $-e$ décrit une orbite circulaire de rayon $R$ autour du proton supposé immobile. Données: $e = 1,6.10^{-19}\ C$, $m = 9,0.10^{-31}\ kg$, $\hbar = 1,0.10^{-34}\ SI$.

**1.** Etablir l'expression de la pulsation du mouvement de l'électron autour du proton.

**2.** Etablir l'expression du moment magnétique de l'atome d'hydrogène en fonction de $e$, $\omega$, $R$ et un vecteur unitaire à préciser.

**3.** Le moment cinétique de l'électron est quantifié selon la relation $\overrightarrow{L}_O = n\hbar\overrightarrow{e_z}$. Montrer que le moment magnétique est quantifié, on appelle $\mu_B$ le magnéton de Bohr, soit le moment magnétique dans l'état fondamental. Calculer $\mu_B$.

**4.** Le cobalt est un matériau ferromagnétique, en supposant que chaque atome porte un moment magnétique égal au magnéton de Bohr, calculer le moment magnétique maximum d'un aimant de cobalt de forme cylindrique de rayon $a = 1\ cm$ et de hauteur $h = 5\ mm$. Données: masse volumique et masse molaire du cobalt: $\rho = 8,9.10^3\ kg.m^{-3}$ et $M = 58,9\ g.mol^{-1}$, $\mathcal{N}_a = 6,0.10^{23}\ atomes.mol^{-1}$.

*Réponses: 3-* $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m}$ *4-* $M_{max} = N\mu_B = 1,28\ A.m^2$

## XII. **Oscillations de l'aiguille d'une boussole**

La direction de l'aiguille d'une boussole varie d'un angle $\theta$ plus ou moins important au rythme des pas d'un randonneur qui tient la boussole dans sa main. Evaluer la période des oscillations.

Données: $J_\Delta$: le moment d'inertie de la boussole par rapport à son axe de rotation $\Delta$

$\overrightarrow{M} = M\overrightarrow{u}$ le moment magnétique de la boussole

$\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_x}$ le champ magnétique terrestre uniforme avec $\overrightarrow{u_x}$ le vecteur unitaire horizontal dirigé du sud vers le nord.

Le couple résultant des forces exercées sur un dipôle magnétique $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M}\Lambda\overrightarrow{B}$

*Réponse:* $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{MB}}$