Révisions mécanique: correction

I. Energie potentielle effective

1. Le point matériel subit son poids et la réaction du support qui se compensent car on néglige les frottements. Il subit également la force de rappel élastique $\overrightarrow{F} = -k(r-l_0)\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées polaires.

On applique le TMC au palet: $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OM}\Lambda\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ car la force de rappel est incapable de faire tourner M autour de O.

Le moment cinétique de M est donc constant.

On peut l'exprimer pour la suite: $\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM}\Lambda m\overrightarrow{v} = r\overrightarrow{e_r}\Lambda m(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$ donc $L_0 = mr^2\dot{\theta} =$ constante dont la valeur se déduit des conditions initiales: $\overrightarrow{L_O} = l_1\overrightarrow{u_x}\Lambda ml_1\omega\overrightarrow{u_y} = ml_1^2 omega\overrightarrow{u_z}$.

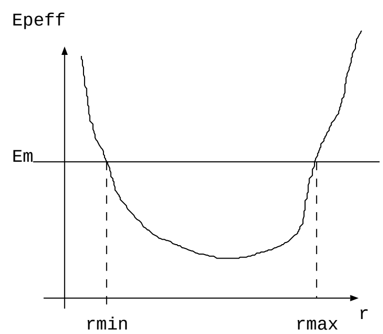
2. La force de rappel est conservative son énergie potentielle s'écrit $E_p = \dfrac{k}{2}(r-l_0)^2$. Le système est donc conservatif et son énergie mécanique se conserve.

$E_m = \dfrac{mv^2}{2} + E_p$ avec $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ soit $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \dfrac{L_0^2}{m^2r^2}$.

On a donc $E_m = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{L_0^2}{2mr^2} + \dfrac{k}{2}(r-l_0)^2$.

On définit l'énergie potentielle effective par $E_{peff} = \dfrac{L_0^2}{2mr^2} + \dfrac{k}{2}(r-l_0)^2$.

3. Le terme $\dfrac{m\dot{r}^2}{2}$ est positif ou nul donc l'énergie mécanique doit être supérieure ou égale à l'énergie potentielle effective pour que le mouvement soit possible. On trace l'allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r. L'énergie mécanique est constante et sa valeur se déduit des conditions initiales: $E_m = \dfrac{mv_0^2}{2} + \dfrac{k}{2}(l_1-l_0)^2 > 0$.



On a donc $r_{min} \leq rleqr_{max}$: M ne peut pas passer par le point O, i ne peut pas partir à l'infini et sa vitesse selon $\overrightarrow{e_r}$ vaut $\dot{r}$, elle peut s'annuler mais sa vitesse selon $\overrightarrow{e_\theta}$ vaut $r\dot{\theta} = \dfrac{L_0}{mr}$ ne peut pas s'annuler.

II. Volant de badmington

1. Sur la courbe $z(t)$ on lit $z \approx 1,8\ m$ pour $t = 0$.

La courbe qui donne $v = \dot{z}$ en fonction de z est un portrait de phase. Quand $v = \dot{z} > 0$, z est une fonction croissante et quand $v = \dot{z} < 0$, z est une fonction décroissante. Ici à $t = 0$, on lit $z = 1,8\ m$ et $v = 50\ m.s^{-1}$.

Ensuite au cours du temps, z augmente et atteint la valeur maximale 14 m et diminue jusqu'à ce que le volant tombe sur le sol.

2. $\mathcal{R}e = \dfrac{\rho v L}{\eta} = \dfrac{1.50.0.05}{10^{-5}} \approx 10^5 >> 1$: ce nombre de Reynolds très élevé justifie une force de traînée proportionnelle au carré de la vitesse.

Le volant subit son poids et la force de traînée, la vitesse limite correspond à la phase où les deux forces se compensent soit $mg = mhv_l^2$ on a donc $h = \dfrac{g}{v_l^2}$. Sur la courbe on lit $v_l = -8\ m.s^{-1}$ soit $h = 0,16\ m^{-1}$.

3. Le théorème de la puissance mécanique s'écrit $\dfrac{dE_m}{dt} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} = -mhv^3$ (pendant la phase ascendante $v > 0$ et $-mhv^3 < 0$ montre que le système perd de l'énergie mécanique sous l'action de la force de traînée) avec $E_m = \dfrac{mv^2}{2} + mgz$.

Remarque: $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e_z}$ et $||\overrightarrow{v}|| = v$ dans la phase ascendante car $v > 0$.

On a donc $\frac{dE_m}{dz}\frac{dz}{dt} = (\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dz} + mg)v = -mhv^3$ qui donne, après simplification par mv: $\frac{dv^2}{dz} + 2hv^2 = -2g$.

On pose $u = v^2$ et on doit résoudre $\frac{du}{dz} + 2hu = -2g$.

De solution: $u = -\frac{g}{h} + Ae^{-2hz} = v^2$.

On détermine A avec les CI: $v_0^2 = -\frac{g}{h} + Ae^{-2hz_0}$ soit $A = (v_0^2 + \frac{g}{h})e^{+2hz_0}$.

On a donc $v^2 = -\frac{g}{h} + (v_0^2 + \frac{g}{h})e^{-2h(z-z_0)}$.

L'altitude maximale est atteinte pour $v = 0$ soit $0 = -\frac{g}{h} + (v_0^2 + \frac{g}{h})e^{-2h(z_{max}-z_0)}$ soit encore $e^{-2h(z_{max}-z_0)} = \frac{\frac{g}{h}}{v_0^2 + \frac{g}{h}} = \frac{1}{1 + \frac{v_0^2 h}{g}}$ et donc $z_{max} = z_0 + \frac{1}{2h}\ln(1 + \frac{v_0^2 h}{g})$.

AN: $z_m = 14\ m$ avec les valeurs numériques $v_0 = 50\ m.s^{-1}$, $z_0 = 1,8\ m$, $h = 0,15\ m^{-1}$, c'est aussi la valeur qu'on lit sur les courbes.

4. Pendant la phase descendante, $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e_z}$ et $||\overrightarrow{v}|| = -v$ car $v < 0$.

Le théorème de la puissance mécanique s'écrit donc $\frac{dE_m}{dt} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} = +mhv^3 < 0$.

On a donc $\frac{dv^2}{dz} - 2hv^2 = -2g$.

III. **Satellites artificiels**

1. Le satellite subit la force d'attraction de la Terre (force poids) $\overrightarrow{F} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$. On applique le PFD au satellite: $m(-\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta}) = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$.

On projette sur $\overrightarrow{e_\theta}$: $\frac{dv}{dt} = 0$: le mouvement est uniforme.

On projette sur $\overrightarrow{e_r}$: $-\frac{v^2}{r} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{r^2}$ soit $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}$.

On en déduit la période: $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T}}$

On en déduit l'énergie mécanique: $E_m = \frac{mv^2}{2} - \frac{\mathcal{G}M_T m}{r} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2r}$.

Ici le rayon du cercle est $r = R_T + h$.

2. Les expressions de l'énergie mécanique et de la période sont encore valables pour un mouvement elliptique, à condition de remplacer le rayon du cercle par le demi grand axe de l'ellipse.

On a donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G}M_T}}$ et $E_m = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2a}$ avec ici $2a = (R_T + h_P) + (R_T + h_A)$ soit $a = R_T + \frac{h_P + h_A}{2}$.

L'énergie mécanique est constante et la vitesse varie pour un mouvement elliptique, on a $E_m = \frac{mv^2}{2} - \frac{\mathcal{G}M_T m}{r} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2a}$. Cette expression permet de trouver l'expression de la vitesse lorsque le satellite à la distance r de la Terre soit $v = \sqrt{2\mathcal{G}M_T(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a})}$.

On trouve la vitesse au périgée en remplaçant r par $R_T + h_P$. Au périgée, le satellite est le plus proche de la Terre, la vitesse est donc la plus grande. Ce résultat vient de la loi des aires, qui dit que le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaie des aires égales en des temps égaux donc plus le satellite est près de la Terre, plus il va vite et plus il est loin, plus il va doucement.

IV. **Ellipse de transfert**

1. La fusée subit la force d'attraction de la Terre (force poids) $\overrightarrow{F} = -\frac{\mathcal{G}M_0 m}{R^2}\overrightarrow{e_r}$. On applique le PFD à la station: $m(-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{e_r}+\frac{dv}{dt}\overrightarrow{e_\theta})=-\frac{\mathcal{G}M_0 m}{R^2}\overrightarrow{e_r}$.

On projette sur $\overrightarrow{e_\theta}$: $\frac{dv}{dt}=0$: le mouvement est uniforme.

On projette sur $\overrightarrow{e_r}$: $-\frac{v^2}{R}=-\frac{\mathcal{G}M_0}{R^2}$ soit $v=\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{R}}$.

On en déduit la période: $T=\frac{2\pi R}{v}=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mathcal{G}M_0}}$. On écrit la 3ième loi de Képler sous la forme $T^2=\frac{4\pi R^3}{\mathcal{G}M_0}$.

L' expression de la période est encore valable pour un mouvement elliptique, à condition de remplacer le rayon du cercle par le demi grand axe de l'ellipse soit $T^2=\frac{4\pi a^3}{\mathcal{G}M_0}$.

2. On en déduit l'énergie mécanique sur l'orbite circulaire: $E_m=\frac{mv^2}{2}-\frac{\mathcal{G}M_0 m}{R}=-\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2R}$.

L' expression de l'énergie mécanique est encore valable pour un mouvement elliptique, à condition de remplacer le rayon du cercle par le demi grand axe de l'ellipse soit $E_m=-\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2a}$.

On a $E=-\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2R_f}$ sur l'orbite circulaire de rayon R_f et $E'=-\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2a}$ avec $2a=R_f+R_s$.

On en déduit les vitesses au point P:

sur la trajectoire circulaire: $E=\frac{mv^2}{2}-\frac{\mathcal{G}M_0 m}{R_f}=-\frac{\mathcal{G}M_0 m}{2R_f}$ soit $v=\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{R_f}}$.

sur la trajectoire elliptique: $E'=\frac{mv'^2}{2}-\frac{\mathcal{G}M_0 m}{R_f}=-\frac{\mathcal{G}M_0 m}{R_f+R_s}$ soit $v'=\sqrt{2\mathcal{G}M_0(\frac{1}{R_f}-\frac{1}{R_f+R_s})}=\sqrt{2\mathcal{G}M_0\frac{R_s}{R_f(R_f+R_s)}}$.

Au point P la fusée doit donc accélérer car $v'-v>0$.

3. Le transfert correspond au parcours de la moitié de la trajectoire elliptique soit soit $t_2-t_1=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G}M_0}}$ avec $a=\frac{R_f+R_s}{2}$.

4. La fusée va de P vers A en un temps t_2-t_1.

Pendant cet intervalle de temps, la station se déplace sur son orbite circulaire de rayon R_s à vitesse constante $v_s=\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{R_s}}$. Elle parcourt l'arc de cercle entre S et A, cet arc est vu sous l'angle $\pi-\alpha$. Or la longueur d'un arc de cercle est égal au produit de l'angle balayé avec le rayon du cercle donc la distance parcourue par la station est $(\pi-\alpha)R_s$.

La station parcourt donc la distance entre S et A en un temps $\Delta t=\frac{(\pi-\alpha)R_s}{v_s}=(\pi-\alpha)\sqrt{\frac{R_s^3}{\mathcal{G}M_0}}$.

La rencontre se fait pour $t_2-t_1=\Delta t$ soit $\pi\sqrt{\frac{(R_f+R_s)^3}{2^3\mathcal{G}M_0}}=(\pi-\alpha)\sqrt{\frac{R_s^3}{\mathcal{G}M_0}}$ soit $\alpha=\pi(1-(\frac{R_s+R_f}{2R_s})^{3/2})$.

V. **Expérience de Rutherford**

1. La particule α subit la force électrostatique répulsive (les charges sont de même signe): $\overrightarrow{F}=+\frac{2e.Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$.

On néglige le poids de la particule et les forces d'interaction gravitationnelle devant la force électrostatique.

Cette force est conservative donc l'énergie mécanique de la particule α est constante soit $E_m=\frac{mv^2}{2}+\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ est une constante.

L'énergie mécanique a donc la même valeur lorsque la particule α se trouve à l'infini avec la vitesse $\overrightarrow{v_0}$ et à l'infini avec la vitesse $\overrightarrow{v_1}$. Or à l'infini, l'énergie potentielle est nulle, on a donc $\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}$ soit $v_0=v_1$.

2. La force électrostatique est incapable de faire tourner M autour de O donc son moment est nul et donc, d'après le théorème du moment cinétique, on a $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{0}$ soit le moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM}\Lambda m\overrightarrow{v}$ est un vecteur fixe.

Ainsi, par définition du produit vectoriel, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont perpendiculaires au vecteur fixe $\overrightarrow{L_O}$ donc le mouvement de M se fait dans le plan passant par O et perpendiculaire à $\overrightarrow{L_O}$.

3. Le moment cinétique en coordonnées polaires s'écrit: $\overrightarrow{L_O} = r\overrightarrow{e_r}\Lambda m(\dot{r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$.

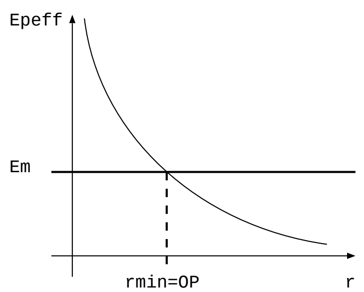
Le moment cinétique est constant, on peut déterminer sa valeur en le calculant avec les conditions initiales soit $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM_0}\Lambda mv_0\overrightarrow{e_x}$. Pour faire ce produit vectoriel on écrit le vecteur $\overrightarrow{OM_0}$ sous la forme $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_0}$ avec $\overrightarrow{HM_0}$ colinéaire à $\overrightarrow{v_0}$ donc le produit vectoriel de ces deux vecteurs est nul soit:

$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OH}\Lambda mv_0\overrightarrow{e_x} = b\overrightarrow{e_y}\Lambda mv_0\overrightarrow{e_x} = -mbv_0\overrightarrow{e_z}$.

On a donc $mr^2\dot{\theta} = -mbv_0$.

4. L'énergie mécanique de la particule α s'écrit $E_m = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ avec $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} - \dfrac{bv_0}{r}\overrightarrow{e_\theta}$ soit $v^2 = \dot{r}^2 + (\dfrac{bv_0}{r})^2$.

On en déduit l'énergie mécanique $E_m = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{mb^2v_0^2}{2r^2} + \dfrac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$. On définit l'énergie potentielle effective par $E_{peff} = \dfrac{mb^2v_0^2}{2r^2} + \dfrac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.



Le terme $\dfrac{m\dot{r}^2}{2}$ dans l'énergie mécanique est toujours positif ou nul donc le mouvement de la particule α n'est possible que lorsque son énergie mécanique est supérieure à son énergie potentielle effective soit pour $r = r_{min} = OP$ avec r_{min} qui vérifie l'équation $E_m = E_{peff}$ soit $E_m = \dfrac{mb^2v_0^2}{2r_{min}^2} + \dfrac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{min}}$ avec $E_m = \frac{mv_0^2}{2}$ d'après les conditions initiales. Soit à résoudre: $r_{min}^2 + \dfrac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 mv_0^2}r_{min} - b^2 = 0$.

On écrit le discriminent $\Delta = (\dfrac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 mv_0^2})^2 + 4b^2$

On écrit les solutions $r_{min} = -\dfrac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 mv_0^2} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et on ne garde que la solution positive soit $r_{min} = -\dfrac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 mv_0^2} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

VI. Ressort en rotation

1. On étudie le mouvement de la masse m dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la tige. Ce référentiel est en rotation uniforme dans le référentiel fixe $\mathcal{R}$ galiléen : $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen.

Dans $\mathcal{R}'$, la masse subit:

- son poids

- la réaction du support qui est perpendiculaire à la tige car il n'y a pas de frottement donc $\overrightarrow{R} = R_Y\overrightarrow{e_Y} + R_z\overrightarrow{e_z}$.

- la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F_r} = -k(X - l_0)\overrightarrow{e_X}$

- la force d'inertie de Coriolis qui est perpendiculaire au mouvement relatif $\overrightarrow{F_{ic}} = -2m\omega\overrightarrow{e_z}\Lambda\dot{X}\overrightarrow{e_X} = -2m\omega\dot{X}\overrightarrow{e_Y}$.

- la force d'inertie d'entrainement, ici c'est la force centrifuge, $\overrightarrow{F_{ie}} = +m\omega^2X\overrightarrow{e_X}$

On applique le PFD à la masse m dans $\mathcal{R}'$: $m\overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}}$ avec $\overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}'} = \ddot{X}\overrightarrow{e_X}$

On projette sur OX: $m\ddot{X} = -k(X - l_0) + m\omega^2X$ soit $\ddot{X} + (\dfrac{k}{m} - \omega^2)X = \dfrac{kl_0}{m}$.

2. On reconnaît un oscillateur harmonique à condition que $\dfrac{k}{m} - \omega^2 > 0$: soit il faut que ω soit plutôt petit, la tige ne doit pas tourner trop vite. La condition (*) est donc $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$.

La position d'équilibre vérifie $(\frac{k}{m} - \omega^2)X_e = \frac{kl_0}{m}$ soit $X_e = \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}$.

Lorsque la condition (*) est vérifiée, l'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique, dans ce cas la solution est de la forme $X(t) = X_e + A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$ avec $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$.

On utilise les conditions initiales:

$X(t=0) = X_e = X_e + A$ soit $A = 0$

$\dot{X}(t=0) = v_0 = B\Omega$

On a donc $X(t) = X_e + \frac{v_0}{\omega}\sin(\Omega t)$.

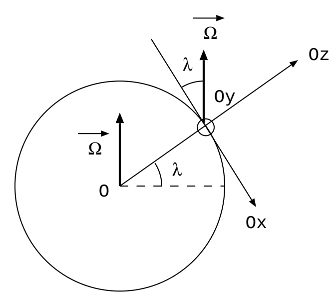
VII. **Effet de la rotation de la Terre**

1. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le point matériel M subit son poids, on néglige tout frottement, on lui applique le PFD: $m\overrightarrow{a} = -mg\overrightarrow{e_z}$ soit $\overrightarrow{v} = (-gt + v_0)\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{OM} = (\frac{-gt^2}{2} + v_0 t)\overrightarrow{e_z}$.

L'altitude maximale atteinte correspond à une vitesse nulle soit $-gt_f + v_0 = 0$ donne $t_f = \frac{v_0}{g}$ et $z_{max} = \frac{-gv_0^2}{2g^2} + v_0\frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$.

M a un mouvement vertical, il retombe en O.

2. $\Omega = \frac{2\pi}{24.3600} = 7,3.10^{-5}\ rad.s^{-1}$



$\overrightarrow{\Omega} = \Omega(-cos\lambda\overrightarrow{e_x} + \sin\lambda\overrightarrow{e_z})$

Dans le référentiel terrestre non galiléen, M subit son poids (qui contient la fore d'inertie d'entraînement) et la force de Coriolis qui s'écrit: $\overrightarrow{F}_{ic} = -2m\overrightarrow{\Omega}\Lambda\overrightarrow{v} = -2m\Omega(-\cos\lambda\overrightarrow{e_x} + \sin\lambda\overrightarrow{e_z})\Lambda(-gt + v_0)\overrightarrow{e_z} = -2m\Omega\cos\lambda(-gt + v_0)\overrightarrow{e_y}$.

Le PFD s'écrit: $m\overrightarrow{a} = -mg\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{F}_{ic}$

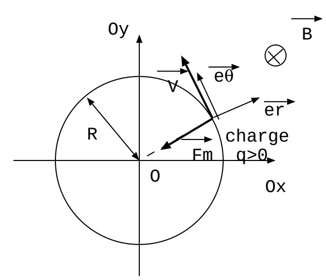
En projection sur Ox: $\ddot{x} = 0$ donc $\dot{x} = 0$ et $x = 0$

En projection sur Oy: $\ddot{y} = -2\Omega\cos\lambda(-gt + v_0)$ donc $\dot{y} = \Omega\cos\lambda(gt^2 - 2v_0 t)$ et $y = \Omega\cos\lambda(\frac{gt^3}{3} - v_0 t^2$

En projection sur Oz: $\ddot{z} = -g$ donc $\dot{z} = -gt + v_0$ soit $z = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t$.

Le point tombe sur le sol en $z = 0$ à l'instant t_s tel que $\frac{-gt_s^2}{2} + v_0 t_s = 0$ soit $t_s = \frac{2v_0}{g}$. A cet instant on a $y(t_s) = \Omega\cos\lambda(\frac{8gv_0^3}{3g^3} - v_0\frac{4v_0^2}{g^2} = -\Omega\cos\lambda(\frac{4v_0^3}{3g^2} < 0$: M est dévié vers l'ouest.

VIII. **Spectrographe de masse**



1. La charge q décrit un cercle sous l'action de la force de Lorentz magnétique $\overrightarrow{F_m} = q\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{B}$, cette force est centripète, pour cela $\overrightarrow{B}$ doit être selon $-Oz$ soit $B < 0$.

$\overrightarrow{F_m} = qv\overrightarrow{e_\theta}\Lambda B\overrightarrow{e_z} = bvB\overrightarrow{e_r}$

On applique le PFD en négligeant le poids de la particule: $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F_m}$

En projection sur $\overrightarrow{e_\theta}$: $\frac{dv}{dt} = 0$: le mouvement est uniforme

En projection sur $\overrightarrow{e_r}$: $-m\dfrac{v^2}{R} = qvB$ soit $R = \dfrac{-mv}{qB} = \dfrac{mv}{q|B|}$.

2. Pour que les cations soient accélérés dans la zone entre F_1 et F_2, il faut que la force électrique $\overrightarrow{F_e} = e\overrightarrow{E}$ soit dans le sens du mouvement. Or le champ électrique est dirigé des forts vers les faibles potentiels, donc on doit avoir $V_1 < V_2$ soit $U > 0$.

On applique la conservation de l'énergie mécanique entre F_1 et F_2 à un cation qui ne subit que la force électrique qui est conservative, on a: $eV_1 + 0 = eV_2 + \dfrac{mv^2}{2}$ soit $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}}$: vitesse des cations en F_2.

Dans la zone de champ magnétique, la vitesse des cations est constante, les cations décrivent un demi cercle jusqu'au collecteur. Pour un cation, la distance entre F_2 et le collecteur est donc deux fois le rayon soit:

$d = 2R_2 - 2R_1 = 2\dfrac{m_2 v_2}{e|B|} - 2\dfrac{m_1 v_1}{e|B|} = \dfrac{2}{e|B|}(\sqrt{2eUm_2} - \sqrt{2eUm_1}) = \sqrt{\dfrac{8U}{eB^2}}(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$ avec $m_2 = m_{U8}$ et $m_1 = m_{U5}$.

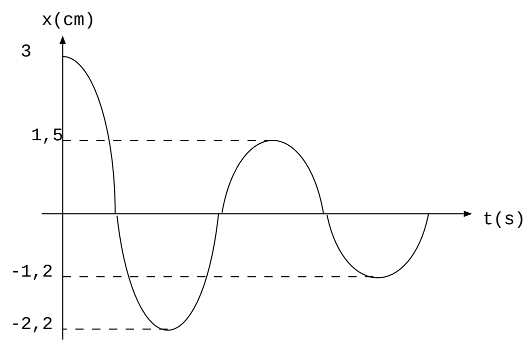
AN: $U = \dfrac{eB^2d^2}{8(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})^2} = 5,0\ kV$.

IX. **Utilisation du portrait de phase**

Dans le portrait de phase, la zone où $\dot{x} > 0$ correspond à x qui augmente et la zone où $\dot{x} < 0$ correspond à x qui diminue. Donc la courbe dans le portrait de phase est toujours décrite dans le sens horaire.

Ainsi l'instant $t = 0$ correspond à $x = 3\ cm$ et $\dot{x} = 0\ m.s^{-1}$ et l'instant $t \to \infty$ correspond à $x = 0$ et $\dot{x} = 0$: la position d'équilibre est donc $x_e = 0\ cm$.

On voit donc que $x(t = 0) = 3\ cm$ puis x diminue jusqu'à atteindre un minimum relatif de valeur $x = -2,2\ cm$, puis x augmente jusqu'à atteindre un maximum relatif de valeur $x = 1,5\ cm$,... c'est un régime **pseudo-périodique.**



On lit sur le portrait de phase qu'entre deux premiers maxima relatifs, le temps écoulé est $315 - 0 = 315\ ms$ et entre deux premiers minima relatifs le temps écoulé est $474 - 158 = 316\ ms$. La pseudo-période est donc $T = 315\ ms$.

Pour résoudre l'équation différentielle, on écrit l'équation caractéristique: $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$, on écrit le discriminent $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$ pour le régime pseudo-periodique.

On en déduit les racines: $r = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

La solution est de la forme $x(t) = x_e + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$ avec $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0\sqrt{(1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$: la pseudo-pulsation.

On en déduit le décrément $\delta = \ln(\dfrac{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))}{e^{-\frac{\omega_0 (t+T)}{2Q}}(A\cos(\omega(t+T)) + B\sin(\omega(t+T))}) = \ln(e^{\frac{\omega_0 T}{2Q}}) = \dfrac{\omega_0 T}{2Q} \approx \dfrac{\pi}{Q}$ car $\omega \approx \omega_0$ et $\omega T = 2\pi$.

$\delta = \ln(\dfrac{3}{1,5}) = 0,7$ on prend $x(t) = 3\ cm$ et $x(t+T) = 1,5\ cm$, on pourrait prendre $x(t) = 1,5\ cm$ et $x(t+T) = 0,8\ cm$....

$Q = \dfrac{\pi}{\delta} = 4,5$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} \approx \dfrac{2\pi}{T} = 20\ rad/s$.

X. **Modélisation de la marche d'un joggeur**

1. On lit que $Z_{max} \approx 240\ mm$ et $Z_{min} \approx 200\ mm$.

L'amplitude crête à crête des oscillations est donc 40 mm soit l'amplitude est $Z_e = 20\ mm$.

La valeur moyenne est donc $Z_{moy} = 220\ mm$.

2. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne non uniforme donc il n'est pas galiléen.

On a $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a}(O')_{\mathcal{R}} = \dfrac{dZ}{dt}\overrightarrow{e_z} = -\omega^2 Z_e \cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$.

3. Lorsque $\mathcal{R}'$ est fixe dans $\mathcal{R}$ et que le système est à l'équilibre, ce système ne subit que son poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$ et la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_r} = -k(z - l_0)\overrightarrow{e_z}$ soit à l'équilibre, la somme des forces est null et donc $z_{eq} = l_0 - \dfrac{mg}{k} < l_0$. A l'équilibre le ressort est comprimé.

4. Dans $\mathcal{R}'$, le système subit: son poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$, la force de rappel élastique $\overrightarrow{F_r} = -k(z - l_0)\overrightarrow{e_z}$, la force de frottements $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$ et la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e} = +m\omega^2 Z_e \cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$.

On applique le PFD au système: $m\overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{ie}}$ avec $\overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}'} = \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$.

On projette sur Oz: $m\ddot{z} = -mg - k(z - l_0) - \alpha\dot{z} + m\omega^2 Z_e \cos(\omega t)$ soit $\ddot{z} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{z} + \dfrac{k}{m}z = -g + \dfrac{kl_0}{m} + \omega^2 Z_e \cos(\omega t)$.

5. On pose $Z = z - z_{eq}$, on a $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$ d'où: $\ddot{Z} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{Z} + \dfrac{k}{m}Z = \omega^2 Z_e \cos(\omega t)$.

Par identification $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\alpha}{m}$ soit $Q = \dfrac{m\omega_0}{\alpha} = \dfrac{\sqrt{km}}{\alpha}$.

6. On passe en notation complexe: $(j\omega)^2\underline{Z} + \dfrac{\omega_0}{Q}j\omega\underline{Z} + \omega_0^2\underline{Z} = \omega^2 Z_e e^{j\omega t}$.

On divise par $e^{j\omega t}$ donc $\underline{Z}$ devient $\underline{Z}_m$, soit:

$-\omega^2\underline{Z}_m + \dfrac{\omega_0}{Q}j\omega\underline{Z}_m + \omega_0^2\underline{Z}_m = \omega^2 Z_e$.

soit $\underline{Z}_m = \dfrac{\omega^2 Z_e}{-\omega^2 + \omega_0^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \dfrac{-Z_e}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - j\frac{\omega_0}{Q\omega}}$.

Pour $\omega \approx 0$ on a $\underline{Z}_m \approx 0$

Pour $\omega \to \infty$ on a $\underline{Z}_m = -Z_e$.

Ce système se comporte comme un filtre passe-haut.