

Révisions d'électromagnétisme

I. Puissance d'un laser

Je choisis d'écrire l'OPPH polarisée selon Oy et se propageant selon Ox sous la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$.

On a $\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$.

On en déduit le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$.

La puissance du laser est égale au flux de la valeur moyenne du vecteur de Poynting à travers la section S , on a $P = \langle \|\vec{R}\| \rangle S = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S$.

On a donc $E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{S}} = 1,07.10^3 \text{ V/m}$.

II. Induction

Dans cet exercice, le fil parcouru par un courant I crée un champ magnétique \vec{B} en tout point de l'espace. Le flux de ce champ magnétique à travers le cadre dépend du temps car le cadre est en mouvement, il y a donc un phénomène d'induction avec l'apparition d'une fem induite dans le cadre qui suit la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt}$.

Dans un premier temps, je cherche le champ magnétique créé par le fil en appliquant le théorème d'Ampère: M appartient au plan de symétrie $P^+(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, il est selon \vec{e}_θ .

Il y a invariance par rotation et par translation selon Oz donc B ne dépend que de r .

On a donc $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.

Je prends pour contour d'Ampère une ligne de champ magnétique soit un cercle de rayon r centré sur le fil et orienté par \vec{e}_z soit $C = \oint B(r) \vec{e}_\theta dl \vec{e}_\theta = B(r) 2\pi r$.

On a appliqué le théorème d'Ampère: $C = B(r) 2\pi r = \mu_0 I_{enlacs} = \mu_0 I$ soit $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

On cherche le flux de ce champ magnétique dans le cadre: Pour un point M dans le cadre, r est l'équivalent de x et $\vec{e}_\theta = \vec{e}_y$.

$$\iint B(x) \vec{e}_y dS \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_x^{x+a} \frac{dx}{x} \int_0^a dy = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{x+a}{x}\right) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{x(t)+a}{x(t)}\right).$$

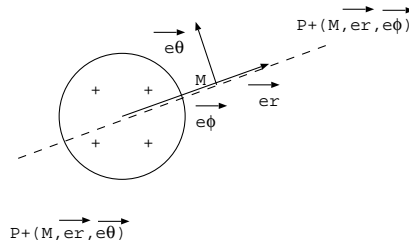
On applique la loi de Faraday:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left(\frac{\dot{x}}{x+a} - \frac{\dot{x}}{x}\right) = -\frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}\right) = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi(x+a)x}.$$

III. Décharge d'une boule

1. Il y a invariance par rotation autour de tout axe passant par O donc les champs électrique et magnétique ne dépendent que de r .

M appartient aux plans $P^+(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $P^+(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$ donc le champ électrique en M appartient à ces plans et le champ magnétique est perpendiculaire à ces plans soit $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ et $\vec{B} = \vec{0}$.



2. On a l'équation de conservation de la charge $div(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ avec $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et l'équation de Maxwell Gauss $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

On a donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma \rho}{\epsilon_0} = 0$ qui s'écrit aussi $\frac{d\rho}{dt} + \frac{\gamma \rho}{\epsilon_0} = 0$ car la distribution de charges est uniforme donc ρ ne

dépend pas de M .

On a par définition $\rho(t) = \frac{q(t)}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ donc $q(t)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{dq}{dt} + \frac{\gamma q}{\epsilon_0} = 0$ de solution $q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$.

3. On détermine le champ électrique par application du théorème de Gauss soit $\oiint \vec{E} dS \vec{n} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$.

On prend pour surface de Gauss une sphère de rayon r soit $\phi = E(r)4\pi r^2$.

Pour $r > R$: $q_{int} = q(t)$ soit $\vec{E} = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

Pour $r < R$: $q_{int} = \rho(t)\frac{4}{3}\pi r^3$ soit $\vec{E} = \frac{\rho(t)r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{q(t)r}{4\pi R^2 \epsilon_0} \vec{e}_r$.

On applique la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ pour trouver \vec{j} .

IV. Onde dans un plasma

Attention dans cet exercice, la notation complexe est $\vec{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_y$ donc la dérivée par rapport au temps est équivalente au produit par $-i\omega$ et la dérivée par rapport à x au produit par ik .

1. Les ions sont considérés immobiles car ils sont très lourds par rapport aux électrons.

2. On applique le PFD à un électron qui subit: son poids (négligeable), la force électrique $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ et la force magnétique $\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ négligeable devant la force électrique car:

$\frac{F_e}{F_m} = \frac{eE}{evB} = \frac{c}{v} \gg 1$ car les électrons ne sont pas relativistes (on a utilisé ici la relation pour une OPPH dans le vide $BC = E$ que l'on suppose encore presque valable dans le plasma).

On a donc $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ soit en notation complexe $-i\omega m \vec{v} = -e\vec{E}$.

On en déduit le vecteur densité de courant $\vec{j} = n(-e)\vec{v} = \frac{-ne^2}{i\omega m} \vec{E} = \underline{\gamma} \vec{E}$ d'après la loi d'Ohm locale, on en déduit donc la conductivité du plasma $\underline{\gamma} = \frac{-ne^2}{i\omega m}$.

3. On utilise les équations de Maxwell et la relation mathématique $\vec{rot}(\vec{rot} \vec{E}) = \vec{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$.

On trouve l'équation de propagation $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$.

On remplace avec la notation complexe: $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \underline{\gamma} i\omega = 0$ soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \underline{\gamma} i\omega = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2}{m\epsilon_0 c^2}$ car $c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$. ON peut définir la pulsation plasma par $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ on a alors $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$.

On distingue deux cas:

$\omega < \omega_p$: $k^2 < 0$ donc k est un imaginaire pur, il y a absorption sans propagation, c'est une onde évanescence.

$\omega > \omega_p$: $k^2 > 0$ donc k est un réel, il y a propagation sans absorption.

V. Onde électromagnétique

1. L'onde est progressive selon $+Ox$ et stationnaire selon Oz .

Elle est polarisée rectilignement selon Oy .

L'onde n'est pas plane car elle dépend de deux variables en coordonnées cartésiennes, physiquement cela signifie que l'amplitude de l'onde n'est pas la même en tout point d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

2. Pour trouver la relation de dispersion (relation entre k et ω) on utilise l'équation de propagation dans le vide $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ et on remplace dans cette équation la solution proposée pour le champ électrique.

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \left(-\frac{\pi^2}{a^2} - k^2\right) \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

On trouve donc la relation $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$.

On distingue deux cas:

$\frac{\omega}{c} > \frac{\pi}{a}$: $k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$: k est réel donc il y a propagation sans absorption. On trouve la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}$: elle dépend de ω donc il y a dispersion.

$\frac{\omega}{c} < \frac{\pi}{a}$: $k = \pm i \sqrt{-\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\pi^2}{a^2}}$: k est imaginaire donc il y a absorption sans propagation.

3. Pour trouver le champ magnétique à partir du champ électrique, on utilise l'équation de Maxwell Faraday:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

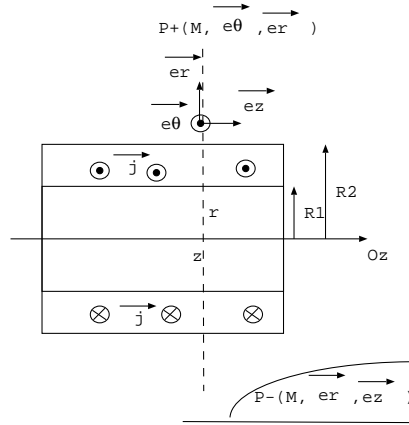
Attention: on ne peut pas appliquer $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$, cette relation n'est valable que pour une OPPH, pas pour un autre type d'onde.

VI. Théorème d'Ampère

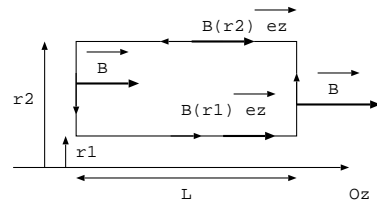
1. M appartient au plan de symétrie $P^+(M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_r)$ et $P^-(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ donc le champ magnétique est perpendiculaire à $P^+(M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_r)$, il est selon \vec{e}_z .

Il y a invariance par rotation et par translation selon Oz donc B ne dépend que de r .

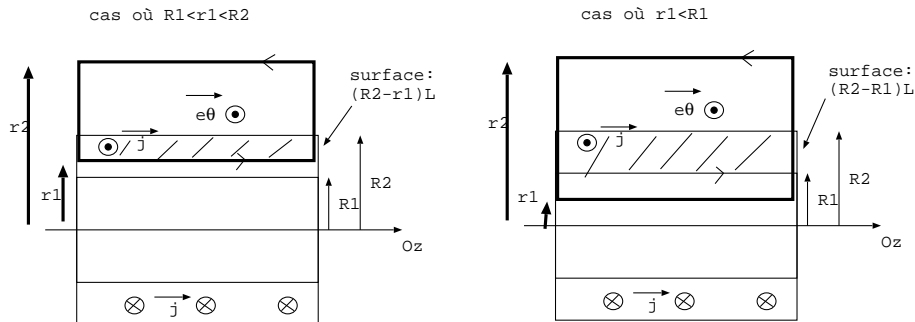
On a donc $\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$. Les lignes de champ sont des droites parallèles à Oz .



2. On prend pour contour d'Ampère un rectangle orienté selon $\vec{\theta}$ de longueur L et compris entre r_1 et r_2 . On exprime la circulation de \vec{B} sur ce contour: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{OM} = +B(r_1)L - B(r_2)L$.



On applique le théorème d'Ampère: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{OM} = \mu_0 I_{\text{enlacs}}$.



Pour $R_1 < r_1 < R_2$ on a $I_{\text{enlacs}} = jL(R_2 - r_1)$ donc $B(r_1)L - B(r_2)L = \mu_0 jL(R_2 - r_1)$ avec $B(r_2) = 0$ (champ nul à l'extérieur du solénoïde) d'où $B(R_1 < r < R_2) = \mu_0 j(R_2 - r)$.

Pour $r_1 < R_1$ on a $I_{\text{enlacs}} = jL(R_2 - R_1)$ donc $B(r_1)L - B(r_2)L = \mu_0 jL(R_2 - R_1)$ avec $B(r_2) = 0$ (champ nul à l'extérieur du solénoïde) d'où $B(r < R_1) = \mu_0 j(R_2 - R_1)$.