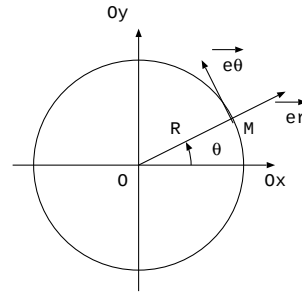


Interrogation de rentrée

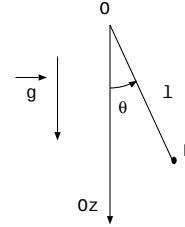
I. Mouvement d'un satellite

Un satellite assimilé à un point matériel M de masse m décrit une orbite circulaire de rayon R autour de la Terre. On note O et M_T , le centre et la masse de la Terre. On note $\mathcal{G}$, la constante de gravitation universelle. Dédurre de la RFD appliquée au satellite l'expression de la vitesse v du satellite sur son orbite ainsi que la période T de son mouvement. Exprimer l'énergie mécanique du satellite en fonction de m , M_T , $\mathcal{G}$ et R .

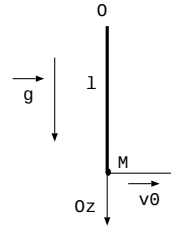


II. Pendule

Soit un pendule simple de longueur l et de masse m . On néglige tout frottement. On repère la position du pendule par l'angle θ que fait la direction du fil par rapport à la verticale descendante Oz .

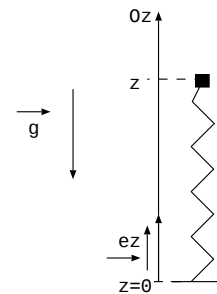


1. Exprimer son énergie potentielle en fonction de m , g , l et θ .
2. Enoncer le théorème de la puissance mécanique. Qu'en déduit-on ici sur l'énergie mécanique?
3. On envoie le pendule avec une vitesse v_0 depuis la verticale. Exprimer sa vitesse lorsqu'il atteint la position désignée par l'angle θ .



III. Point matériel accroché à un ressort

Soit un point matériel M de masse m relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . On repère la position de M par sa cote z (Oz verticale ascendante). On néglige tout frottement.



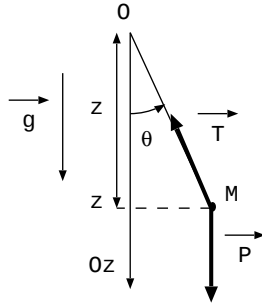
1. Dans cette question, M est supposée immobile. Déterminer l'expression de sa position d'équilibre z_e en fonction des données.
2. Dans cette question, M est en mouvement. Dédurre de la RFD l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. La mettre sous la forme $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$. Exprimer ω_0 .
3. A l'instant $t = 0$, M est à la position $z = z_e$ et possède une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ avec $v_0 > 0$. Résoudre l'équation différentielle pour en déduire $z(t)$ et représenter l'allure de la fonction $z(t)$.

Correction

I - Mouvement d'un satellite

Voir cours pour la correction: exemple 1 du cours sur les lois.

II - Pendule



1- Le pendule subit son poids qui est une force conservative $E_p = -mgh = -mgl \cos \theta$ et la tension du fil qui ne travaille pas.

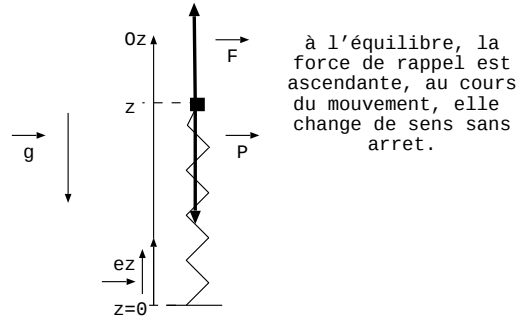
2- Le théorème de la puissance mécanique dit que, dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique de M est égale à la puissance des forces non conservatives qui s'exercent sur M . Ici la seule force conservative qui s'exerce sur M est la tension du fil et elle est perpendiculaire au mouvement donc sa puissance est nulle. On en déduit donc que l'énergie mécanique de M est constante.

3- A la verticale, l'énergie mécanique de M s'écrit $E_m = \frac{mv_0^2}{2} - mgl$ et dans la position θ , l'énergie mécanique de M s'écrit $E_m = \frac{mv^2}{2} - mgl \cos \theta$. L'énergie mécanique se conserve donc on a $E_m = \frac{mv_0^2}{2} - mgl = \frac{mv^2}{2} - mgl \cos \theta$ soit $v = \sqrt{v_0^2 - 2gl(1 - \cos \theta)}$.

Correction: point matériel accroché à un ressort

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

M subit son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ et la force de rappel du ressort soit $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{spires/vers/M} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$.



1- A l'équilibre, la somme des forces est nulle soit $-mg\vec{e}_z - k(z_e - l_0)\vec{e}_z = \vec{0}$ soit $z_e = l_0 - \frac{mg}{k} < 0$: on vérifie que la position d'équilibre est bien plus petite que la longueur à vide du ressort puisque le ressort à l'équilibre ici est comprimé.

2- Hors équilibre, on applique la RFD: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$ avec $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$.

On a donc en projection sur $\vec{e}_z$: $m\ddot{z} = -mg - k(z - l_0)$ soit $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}(l_0 - \frac{mg}{k})$. Soit par identification avec l'énoncé, on a bien $z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

3- On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 .

La solution de l'équation différentielle comprend une solution particulière $z_p = z_e$ et une solution générale de la forme $z_g = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. On a donc pour solution $z(t) = z_e + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. On trouve A et B avec les conditions initiales.

Soit $z(t=0) = z_e = z_e + A$ soit $A = 0$

$\dot{z}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ avec $A = 0$ d'où $\dot{z}(t) = v_0 = B\omega_0$ donc $B = \frac{v_0}{\omega_0}$.

On a donc $z(t) = z_e + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$. Pour tracer la courbe on place le point à $t = 0$ à la position $z = z_e$ et avec une tangente à la courbe de pente positive puisque $v_0 > 0$. De plus la fonction $z(t)$ varie entre $z_e - \frac{v_0}{\omega_0}$ et $z_e + \frac{v_0}{\omega_0}$.

