

Correction de l'interrogation de rentrée 2026

I. Energie potentielle

M subit son poids, force conservative d'énergie potentielle $E_{pp} = +mgz$ (l'axe Oz est dirigé vers le haut d'où le signe $+$ qui traduit que lorsque z augmente, le point M monte et son énergie potentielle augmente) avec $z = R \cos \theta$ donc $E_{pp} = +mgR \cos \theta$.

M subit également la réaction du support qui ne travaille pas donc qui ne possède pas d'énergie potentielle.

II. Point matériel accroché à un ressort

M subit son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$ et la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{ressort \text{ vers } M} = -k(z - l_0)\vec{e}_z$.

1. Dans cette question M est à l'équilibre donc la somme des forces est nulle soit en projection sur Oz : $mg - k(z_e - l_0) = 0$ soit $z_e = l_0 + \frac{mg}{k} > l_0$: le ressort est bien étiré.

2. Dans cette question M n'est pas à l'équilibre donc la RFD s'écrit $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$ soit en projection sur Oz : $m\ddot{z} = mg - k(z - l_0)$ ou encore $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0 = \frac{k}{m}(l_0 + \frac{mg}{k}) = \frac{k}{m}z_e$.

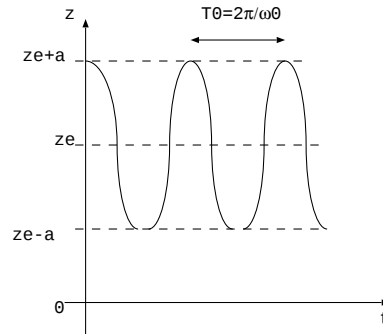
Par identification avec l'énoncé on a $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la pulsation propre de cet oscillateur harmonique.

3. On reconnaît un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 , de solution $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + z_e$.

On trouve A et B avec les conditions initiales. On a $\dot{z}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$.

$z(t = 0) = z_e + a = z_e + A$ soit $A = a$ et $\dot{z}(t = 0) = 0 = B\omega_0$ soit $B = 0$.

On a donc $z(t) = z_e + a \cos(\omega_0 t)$: cette fonction varie entre $z_e - a$ et $z_e + a$.



III. Mouvement circulaire

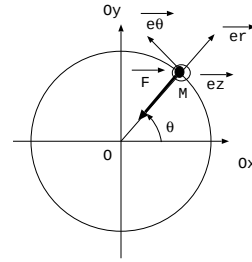
1. Position: $\vec{OM} = R\vec{e}_r$

Vitesse: $\vec{v}(M) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Accélération: $\vec{a}(M) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$ qui s'écrit aussi

en remplaçant v par $\frac{\dot{\theta}}{R}$: $\vec{a}(M) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r$.

2. Le satellite subit la force gravitationnelle attractive $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R^2}\vec{e}_r$.



2.a. La RFD appliquée au satellite s'écrit $m\vec{a}(M) = \vec{F}$ soit $m(\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r) = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R^2}\vec{e}_r$.

On projette selon $\vec{e}_\theta$: $\frac{dv}{dt} = 0$ donne que la vitesse est constante

On projette selon $\vec{e}_r$: $-m\frac{v^2}{R} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{R^2}$ soit $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R}}$.

Le satellite décrit un cercle à vitesse constante, la période du mouvement est égale à la distance parcourue sur une période (soit $2\pi R$: périmètre du cercle) divisée par la vitesse d'où $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mathcal{G}M_T}}$.

2.b. L'énergie mécanique du satellite est la somme de son énergie potentielle $E_p = \frac{-\mathcal{G}M_T m}{R}$ et de son énergie cinétique $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{\mathcal{G}M_T m}{2R}$. Soit $E_m = \frac{\mathcal{G}M_T m}{2R} + \frac{-\mathcal{G}M_T m}{R} = \frac{-\mathcal{G}M_T m}{2R}$.