

# Révisions: Théorème du moment cinétique

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un point matériel  $M$  qui tourne autour d'un point  $O$  ou d'un solide qui tourne autour d'un axe. Dans ce cas, le théorème du moment cinétique est un outil très efficace pour déterminer aisément l'équation du mouvement. Ce théorème n'est pas une nouvelle loi de la mécanique, il se démontre à partir de la RFD, il n'apporte pas d'informations supplémentaires, il est juste plus pratique.

## I. Outils

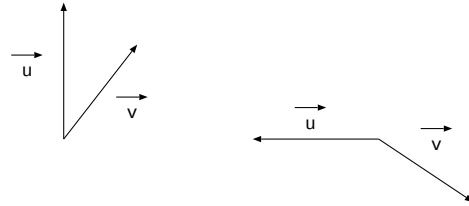
*Comment trouver graphiquement le produit vectoriel de vecteurs?*

On cherche le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

$\vec{u}$  dirigé selon

$\vec{v}$  dirigé selon

$\vec{w}$  dirigé selon



Dans le cas où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires:

*Comment calculer le produit vectoriel de deux vecteurs?*

Dans la base polaires  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ :

$$\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = \dots\dots\dots, \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = \dots\dots\dots, \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = \dots\dots\dots$$

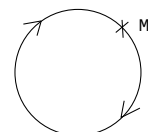
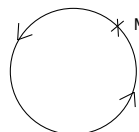
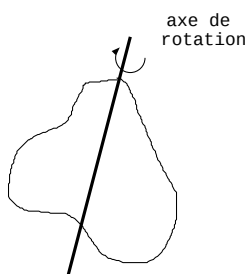
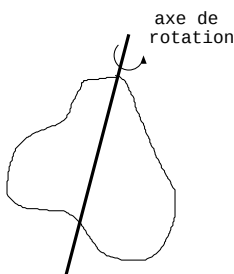
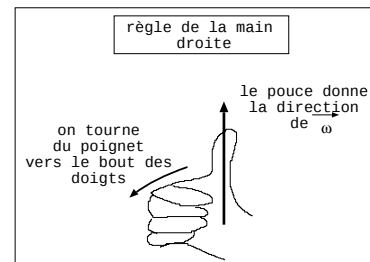
*Comment trouver le sens d'un vecteur rotation?*

Pour décrire le mouvement de rotation d'un point matériel qui tourne autour d'un point  $O$  ou d'un solide tourne autour d'un axe, on utilise un vecteur vitesse angulaire noté  $\vec{\omega}$ :

dont la norme est  $\omega =$

dont la direction est

dont le sens est



## II. Le moment cinétique

On distingue dans cette partie deux cas: le moment cinétique d'un point matériel et le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe.

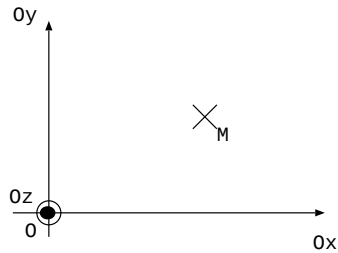
### 1. Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe

*Définition:* le moment cinétique d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport à  $O$  s'écrit:

Son unité:

Le moment cinétique dépend du référentiel d'étude.

*Son expression en coordonnées polaires:*



### 2. Moment cinétique d'un solide tournant autour d'un axe

Le moment cinétique d'un solide est égal à la somme des moments cinétiques de chacun des points qui constituent le solide. Lorsqu'un solide tourne autour d'un axe à la vitesse angulaire  $\omega$ , tous les points de ce solide tournent à la même vitesse angulaire. D'après le paragraphe précédent, le moment cinétique de ce solide est donc:

*Exemples d'expressions de moment d'inertie de solides homogènes :* les moments d'inertie sont donnés par les énoncés.

| Cylindre plein de rayon $R$   | Sphère pleine de rayon $R$     | Tige de longueur $2L$         | Une masse $m$ à la distance $l$ de l'axe |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|------------------------------------------|
|                               |                                |                               |                                          |
| $J_{\Delta} = \frac{mR^2}{2}$ | $J_{\Delta} = \frac{2mR^2}{5}$ | $J_{\Delta} = \frac{mL^2}{3}$ | $J_{\Delta} = ml^2$                      |

*Qu'est-ce que le moment d'inertie?*

On peut tout d'abord rappeler que l'inertie d'un corps est la résistance qu'il oppose lorsqu'on essaie soit de le mettre en mouvement, soit de l'arrêter. La grandeur physique qui mesure l'inertie d'un corps est sa masse.

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe  $\Delta$  mesure

Exemple : le patineur

*A retenir:* le moment d'inertie d'un solide par rapport à son axe de rotation  $\Delta$  sert à exprimer :

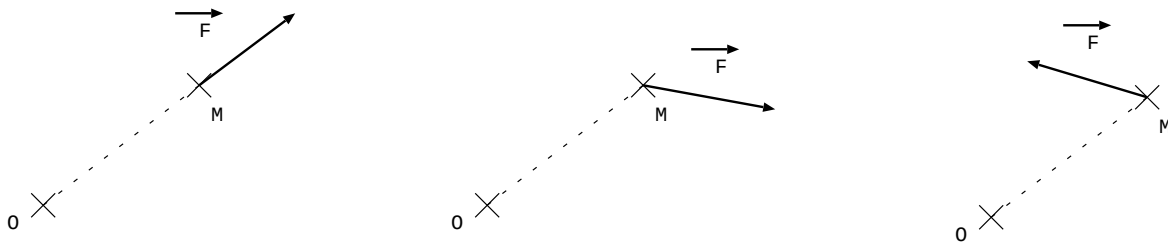
- $\propto$  le moment cinétique du solide par rapport à  $\Delta$  :
- $\propto$  l'énergie cinétique du solide :

### III. Le moment d'une force

*Définition:* le moment de la force  $\vec{F}$  exercée sur  $M$  et calculé par rapport à  $O$  s'écrit:

Son unité:

*Sens physique du moment d'une force:* dans les exemples suivants, représenter le moment de la force  $\vec{F}$  exercée sur  $M$  et calculé par rapport à  $O$ , ainsi que le vecteur rotation associée à la rotation de  $M$  autour de  $O$  provoquée par la force  $\vec{F}$ .

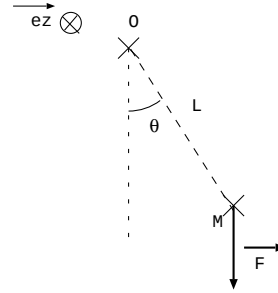
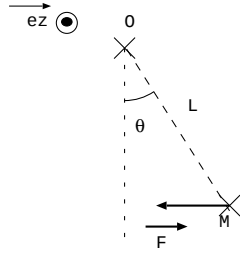
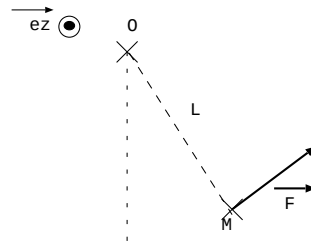
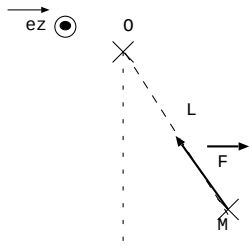


*Expression du moment d'une force par la méthode du bras de levier:* on cherche à calculer  $\vec{M}_O(\vec{F})$ :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \|\vec{F}\| d \vec{u}$$

où  $\vec{u}$  désigne le vecteur unitaire dans le sens et la direction de la rotation de  $M$  autour de  $O$  provoquée par la force  $\vec{F}$

où  $d$  désigne le bras de levier (le bras de levier est une distance). On trace la droite d'action de la force (droite passant par  $M$  et  $\vec{F}$ ), le bras de levier est la plus courte distance entre cette droite et le point  $O$ .



*Cas particulier:* pour des forces qui dépendent de la vitesse ou de la position, il peut être plus simple de calculer le moment de la force avec le produit vectoriel dans le système de coordonnées de l'étude.

Exemple: soit un pendule simple de longueur  $l$  et de masse  $m$  soumis à la force de frottements fluide  $\vec{F} = -mh\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ .

## IV. Théorème du moment cinétique

### 1. Théorème du moment cinétique d'un point matériel

*Enoncé:*

## 2. Théorème scalaire du moment cinétique d'un solide en rotation

*Enoncé:*

Parmi les forces extérieures, on distingue:

- Les forces de réaction de l'axe de rotation sur le solide. Dans le cas d'**une liaison pivot idéale**, la résultante des actions de l'axe de rotation sur le solide s'applique en un point de l'axe donc **le moment de ces forces est nul**.

- Dans l'énoncé de certains exercices, on dit que le solide subit l'action d'un couple. Il existe deux types de couple: les couples moteurs (qui font tourner le solide dans le ..... ) et des couples résistants (qui font tourner le solide dans le ..... ) L'expression de ces couples est donnée par l'énoncé. **Un couple est un moment associé à une résultante de forces nulle**. Dans le théorème du moment cinétique, il faut ajouter ces couples à la somme des moments des forces extérieures exercées sur le solide.

- Les forces comme le poids ou les forces de frottements de l'air s'appliquent .....  
Le moment associé à ces forces est le moment d'une force par rapport à un point, pour le calculer on utilise la méthode du bras de levier.

*Application: le pendule pesant*

Un pendule pesant de masse  $m$  subit un couple moteur de norme  $\Gamma_m$  et un couple résistant de norme  $h\omega$ .  
Le référentiel d'étude est supposé galiléen et la liaison pivot est idéale.

