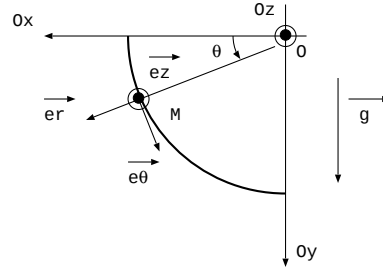


Exercices sur le théorème du moment cinétique

I. Enfant sur un toboggan

Un enfant assimilé à un point matériel M glisse sans frottement sur un toboggan circulaire de rayon R et de centre O . L'enfant est repéré par ses coordonnées polaires. Un de ses parents le retient par son vêtement pour l'empêcher de glisser trop vite, ce qui revient à exercer sur l'enfant une force constante de la forme $\vec{F} = F\vec{e}_x$ avec $F > 0$. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen.

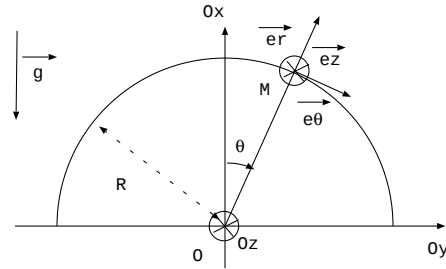


1. Exprimer le moment cinétique de l'enfant par rapport à O .
2. Exprimer les moments des forces exercées sur l'enfant et calculés par rapport à O .
3. Dédire du théorème du moment cinétique appliqué à l'enfant l'équation différentielle vérifiée par θ .

Réponse: $\ddot{\theta} + \frac{F}{mR} \sin \theta - \frac{g}{R} \cos \theta = 0$

II. Objet sur une demi-sphère

Un objet de masse m assimilé à un point matériel M glisse sur une demi-sphère de centre O et de rayon R . Cet objet subit une force de frottement solide $\vec{T}$ de norme T constante. On repère sa position par ses coordonnées polaires. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen.



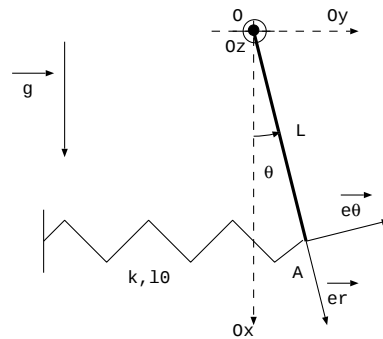
1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O .
2. Exprimer les moments des forces exercées sur M et calculés par rapport à O .
3. Dédire du théorème du moment cinétique appliqué à M l'équation différentielle vérifiée par θ .

Réponse: $\ddot{\theta} - \frac{g}{R} \sin \theta = -\frac{T}{mR}$

III. Pendule et ressort

Une tige OA de longueur L et de moment d'inertie J par rapport à Oz est accroché au point O , point fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire supposé galiléen. L'extrémité A de la tige est reliée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . Lorsque la tige est verticale, le ressort est au repos. La liaison pivot en O est idéale.

On déplace légèrement la tige d'un angle θ_0 par rapport à la verticale puis on la laisse évoluer librement. On repère la position de la tige par l'angle θ avec la verticale.



L'angle θ est toujours faible, donc on peut considérer que le ressort reste horizontal et on fait l'approximatif des petits angles.

1. Calculer les moments des forces s'exerçant sur tige, en fonction de la variable θ et des données.
2. Par application du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ et en déduire la période des petites oscillations de la tige.

Réponses: 2- $\vec{M}_O(\text{forces}) = -(mg\frac{l}{2} + kl^2)\theta\vec{e}_z$ 3- $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\frac{mgl}{2} + kl^2}}$

IV. Chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige homogène de longueur L et de masse m . On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas. On repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. A $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5^\circ$ avec la verticale et est immobile. Le moment d'inertie par rapport à son extrémité est $J = \frac{mL^2}{3}$.

1. Par une méthode énergétique, montrer que lors de la chute de l'arbre la vitesse angulaire vérifie l'équation

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos \theta_0 - \cos \theta)}.$$

2. Calculer numériquement τ , la durée de chute d'un arbre de hauteur 20 m . Donnée: $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ et

pour $\theta_0 = 5^\circ$ on a $\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = 5,1$.

Réponse: $\tau = 4,2 \text{ s}$