

Dérivation et résolution d'une équation différentielle: méthode d'Euler

1. Donnée en annexe d'un sujet de concours

Bibliothèque MATPLOTLIB . PYPLOT

Cette bibliothèque permet de tracer des graphiques. Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `matplotlib.pyplot` a préalablement été importée à l'aide de la commande :

```
import matplotlib.pyplot as plt.
```

- o Description : fonction permettant de tracer un graphique de n points dont les abscisses sont contenues dans le vecteur x et les ordonnées dans le vecteur y . Cette fonction doit être suivie de la fonction `plt.show()` pour que le graphique soit affiché.
- o Argument d'entrée : un vecteur d'abscisses x (tableau de n éléments) et un vecteur d'ordonnées y (tableau de n éléments). La chaîne de caractères 'SC' précise le style et la couleur de la courbe tracée. Des valeurs possibles pour ces deux critères sont :

Valeurs possibles pour S (style) :				
Description	Ligne continue	Ligne traitillée	Marqueur rond	Marqueur plus
Symbole S	-	--	o	+

Valeurs possibles pour C (couleur) :				
Description	bleu	rouge	vert	noir
Symbole C	b	r	g	k

- o Argument de sortie : un graphique.

```
x = np.linspace(3, 25, 5)
y = np.sin(x)
plt.plot(x,y,'-b') # tracé d'une ligne bleue continue
plt.title('titre_graphique') # titre du graphe
plt.xlabel('x') # titre de l'axe des abscisses
plt.ylabel('y') # titre de l'axe des ordonnées
plt.show()
```

2. savoir faire 1: Calcul de la dérivée en différents points d'une fonction

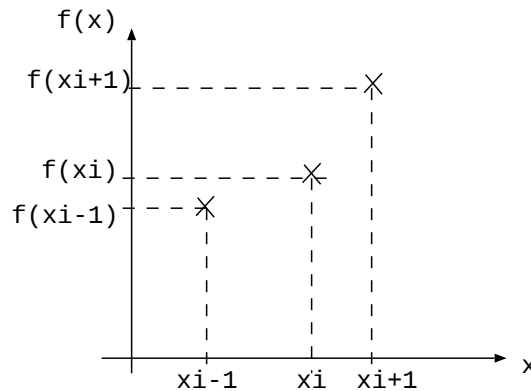
Principe: on dispose de deux listes ou de deux tableaux de valeurs de la fonction $f(x)$ en différents points: $listex = [x_0, x_1, \dots, x_N]$ et $listef = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N)]$.

On peut calculer la valeur de la dérivée $f'(x_i)$ en chacun des points x_i donnés. Pour cela on utilise la relation:

$$f'(x_i) =$$

Remarque: parfois les points x_i sont équidistants, on note dx le pas. Dans ce cas $x_i = x$ et $x_{i+1} = x + dx$ et la relation de dérivée s'écrit:

$$f'(x) =$$



Exemple: un élève étudie le mouvement d'un objet qui se déplace sur l'axe Ox . Il filme le mouvement de l'objet et réalise un pointage de sa position au cours du temps. Les résultats de ce pointage sont contenus dans les listes lt et lx qui contiennent les positions de l'objet à différents instants.

On demande de tracer la courbe $x(t)$ et de déterminer les valeurs de la vitesse v aux différents instants du pointage sachant que l'objet est initialement immobile. Tracer la courbe $v(t)$. On donne le code à compléter:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # dérivation
5 lt=[0,1,3,5,8,11,13,16,17,18,21]
6 lx=[0,12,20,29,36,41,45,48,46,41,24]
7 plt.plot(...,...,...) #tracé des points expérimentaux x(t)
8 plt.grid()
9 plt.xlabel(......)
10 plt.ylabel(......)
11 plt.show()
12
13 lv=[0]
14 for i in range (.....):
15     lv.append(.....)
16 plt.plot(...,...,...) #tracé des points expérimentaux v(t)
17 plt.grid()
18 plt.xlabel(......)
19 plt.ylabel(......)
20 plt.show()

```

3. savoir faire 2: méthode d'Euler pour résoudre une équation différentielle non linéaire

Exemple 1: soit un point matériel M de masse m en chute libre qui subit la force de frottement fluide $\vec{f} = -mhv\vec{v}$. On note Oz la verticale ascendante. Le point à l'instant $t = 0$ se trouve en $z = h$ avec une vitesse nulle.

Le PFD appliqué au point matériel M permet de trouver l'équation différentielle vérifiée par $v = \dot{z}$.

On cherche à résoudre numériquement cette équation.

Pour cela on commence par discrétiser le temps:

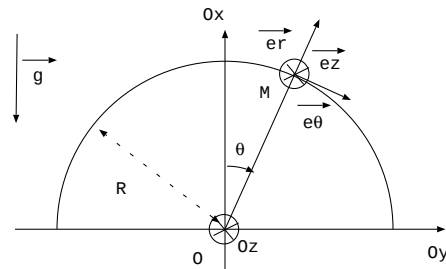
On applique le DL de Taylor au premier ordre en dt qui s'écrit:

Ainsi on en déduit $v(t + dt) =$

On crée deux listes lt: liste des temps et lv: liste des vitesses que l'on initialise avec les conditions initiales et que l'on complète avec les relations de récurrence suivante:

Code type à retenir:

Exemple 2: un objet de masse m assimilé à un point matériel M glisse sur une demi-sphère de centre O et de rayon R . Cet objet subit une force de frottement solide $\vec{T}$ de norme T constante. On repère sa position par ses coordonnées polaires. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre supposé galiléen. Données: $m = 250 \text{ g}$, $T = 0,2 \text{ N}$, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $R = 1 \text{ m}$



Déduire du théorème du moment cinétique appliqué à M l'équation différentielle vérifiée par θ .

Exprimer $\dot{\theta}(t + dt)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$, $\ddot{\theta}(t)$ et dt . Exprimer de même $\theta(t + dt)$ en fonction de $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.

On introduit trois listes lt , $ltheta$ et $lthetapoint$ telles $lt[i] = i \text{ dt}$, $ltheta[i] = \theta(t_i)$ et $lthetapoint[i] = \dot{\theta}(t_i)$. Exprimer les relations de récurrence donnant $lt[i + 1]$ en fonction de $lt[i]$, puis $lthetapoint[i + 1]$ en fonction de $lthetapoint[i]$ et $ltheta[i + 1]$ en fonction de $ltheta[i]$.

Compléter le code suivant sachant que l'objet est initialement en haut de la demi-sphère avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}(t = 0) = 2 \text{ rad/s}$.

```
22 # Méthode d'Euler
23 g,R,T,m=.....
24 tf,N=1,1000
25 dt=tf/N
26 lt=[0]
27 ltheta=[...]
28 lthetapoint=[..]
29 for i in range(N):
30     c=.....
31     lt.append(.....)
32     lthetapoint.append(.....)
33     ltheta.append(.....)
34 plt.plot(...,...)
35 plt.grid()
36 plt.xlabel('....')
37 plt.ylabel('....')
38 plt.show()
```