

Correction Tir d'un projectile

1.

1.a. Le projectile ne subit que son poids soit d'après la RFD appliquée au projectile dans le référentiel galiléen: $m\vec{a} = m\vec{g}$ soit $\vec{a} = \vec{g}$.

En projection sur Ox : $\ddot{x} = 0$

En projection sur Oz : $\ddot{z} = -g$

On primitive deux fois en utilisant les conditions initiales $x(t=0) = 0$, $z(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = v_0 \cos \alpha$ et $\dot{z}(t=0) = v_0 \sin \alpha$.

Soit $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$ et $x = v_0 \cos \alpha t$

Soit $\dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha$ et $z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha t$.

On en déduit l'équation de la trajectoire en éliminant le temps t dans les deux équations soit $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ et

donc $z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$: c'est l'équation d'une parabole.

1.b. On résout l'équation de la trajectoire pour $z = 0$ soit $0 = x(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha)$ d'où $x = 0$: c'est le point de départ du projectile et $x = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$: c'est la portée du tir.

La portée est maximale pour $\sin(2\alpha) = 1$ soit $\alpha = 45^\circ$ et $x_{max} = \frac{v_0^2}{g}$.

1.c. t est la variable en abscisse et d'après la courbe t varie entre 0 s et 7 s d'où la ligne 8: `t=linspace(0,7,500)`.

Sous python, il faut écrire les angles en radian pour calculer leur sinus et leur cosinus.

$$c_1(t) = v_0 \cos \alpha t = x(t)$$

$$c_2(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha t = z(t).$$

On lit $z(t) = 0$ pour $t = 6,2$ s et $x(t = 6,2 \text{ s}) = 107 \text{ m} = x_p$: c'est la portée du tir.

Or d'après la théorie, la portée est $x_p = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ d'où $v_0 = \sqrt{\frac{gx_p}{\sin(2\alpha)}} = 35 \text{ m.s}^{-1}$.

1.d. On trouve α dans les expressions de cos et sin ligne 9 soit $\alpha = \frac{i5\pi}{180}$ en radian donc $\alpha = 5i$ (on multiplie par $\frac{180}{\pi}$ pour convertir en degrés) avec i qui prend les valeurs 1, 2, ..., 17. L'angle α prend donc les valeurs $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots, 85^\circ$.

Pour $x = 100 \text{ m}$, les paraboles passent en dessous de $z = 23 \text{ m}$ donc les projectiles d'une hauteur supérieure à 23 m ne sont pas atteints.

Pour $x = 70 \text{ m}$ et $z = 25 \text{ m}$, les projectiles qui atteignent ce point sont envoyés avec $\alpha = 40^\circ$ ou $\alpha = 70^\circ$.

1.e. On lit sur le code ligne 16, l'équation de la parabole de sûreté $z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$.

1.f. La cible soit se trouver sur la trajectoire du projectile donc ses coordonnées vérifient l'équation $z_c = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x_c$. Dans cette équation, on connaît v_0 , x_c et z_c , et on cherche la valeur de α donc c'est une équation d'inconnue α . On remplace $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ et on doit donc résoudre l'équation

$$\frac{gx_c^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha - x_c \tan \alpha + z_c + \frac{gx_c^2}{2v_0^2} = 0.$$

On pose $\tan \alpha = X$ et on résout l'équation du second degré:

$$\frac{gx_c^2}{2v_0^2} X^2 - x_c X + z_c + \frac{gx_c^2}{2v_0^2} = 0.$$

On écrit le discriminant $\Delta = x_c^2 - 4(\frac{gx_c^2}{2v_0^2} + z_c)\frac{gx_c^2}{2v_0^2}$

Lorsque $\Delta > 0$: il existe deux valeurs de X donc deux valeurs de α qui sont solution: cela signifie qu'une cible peut être atteinte par un projectile envoyé avec deux valeurs de α différentes (voir réponse 1d).

Lorsque $\Delta < 0$: il n'existe pas de valeur de X solution, donc il n'existe pas de valeur de α permettant d'atteindre la cible, la cible est en sécurité.

Le cas limite est donc $\Delta = 0$ (une seule valeur de α pour que la cible soit atteinte), et $\Delta = 0$ donne $x_c^2 - 4(\frac{gx_c^2}{2v_0^2} + z_c)\frac{gx_c^2}{2v_0^2} = 0$ soit $x_c^2(1 - (\frac{gx_c^2}{2v_0^2} + z_c)\frac{2g}{v_0^2}) = 0$ soit après calcul $z_c = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx_c^2}{2v_0^2}$: c'est l'équation de la parabole de sûreté.

2. Par analyse dimensionnelle: $[k] = [\frac{f}{mv^2}] = [\frac{ma}{mv^2}] = [\frac{a}{v^2}] = \frac{m.s^{-2}}{m^2.s^{-2}} = m^{-1}$.

On a $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{z}\vec{e}_z$ et $||\vec{v}|| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$

3. On applique la RFD au projectile qui subit son poids et la force de frottements: $m\vec{a} = m\vec{g} - mk||\vec{v}||\vec{v}$ soit $\vec{a} = \vec{g} - k||\vec{v}||\vec{v} = \vec{g} - k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\vec{v}$

En projection sur Ox : $\ddot{x} = -k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{x}$

En projection sur Oz : $\ddot{z} = -g - k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{z}$

4.

4.a. On applique le DL: $f(t + \text{tau}) = f(t) + \text{tau}f'(t)$

Soit $\dot{x}(t + \text{tau}) = \dot{x}(t) + \text{tau}\ddot{x}(t)$ et $\dot{z}(t + \text{tau}) = \dot{z}(t) + \text{tau}\ddot{z}(t)$.

4.b. De la même façon $x(t + \text{tau}) = x(t) + \text{tau}\dot{x}(t)$ et $z(t + \text{tau}) = z(t) + \text{tau}\dot{z}(t)$.

5.

5.a. Les conditions initiales sont $x(t = 0) = 0$, $z(t = 0) = 0$, $\dot{x}(t = 0) = v_0 \cos \alpha$ et $\dot{z}(t = 0) = v_0 \sin \alpha$ d'où:

ligne 9 : lx,lz=[0],[0]

ligne 10 : lvx,lvz=[v0*np.cos(alpha),v0*np.sin(alpha)]

5.b. Ligne 14 on lit `lt.append(lt[i]+tau)` donc on complète la liste des temps par la relation de récurrence $t_{i+1} = t_i + \text{tau}$ avec le premier terme $t = 0$. Le temps prend donc les valeurs 0, tau , 2tau , 3tau ,... $N\text{tau}$.

Sur la courbe le temps final est $t_f = 3 \text{ s} = N\text{tau}$ soit $\text{tau} = \frac{t_f}{N} = \frac{3}{600} = 0.005$.

5.c. On complète le code avec les réponses questions 4a et 4b avec $a1 = -k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{x} = \ddot{x}$ et $a2 = -k\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}\dot{z} - g = \ddot{z}$.

ligne 17 : lvx.append(lvx[i]+a1*tau)

ligne 18 : lvz.append(lvz[i]+a2*tau)

ligne 19 : lx.append(lx[i]+lvx[i]*tau)

ligne 20 : ly.append(ly[i]+lvz[i]*tau)

5.d. Sur les courbes on lit $z = 0$ pour $t = 2,8 \text{ s}$ et $x(t = 2,8 \text{ s}) = 13,5 \text{ m}$: c'est la portée du tir.