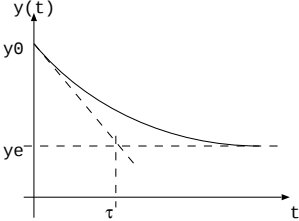
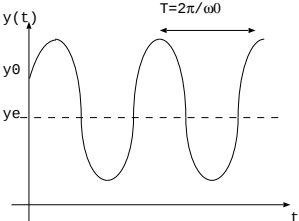


Les équations différentielles classiques

Equations différentielles avec second membre constant

La solution particulière représente la position d'équilibre.

Equation différentielle	Solution particulière	Solution générale	Solution
$\dot{y} + \frac{y}{\tau} = C$	$y_p = \tau C$	$y_g = Ae^{-t/\tau}$	$y(t) = \tau C + Ae^{-t/\tau}$ où A est constante déterminée par la CI: $y(t = 0) = y_0 = \tau C + A$ 
$\ddot{y} + \omega_0^2 y = C$	$y_p = \frac{C}{\omega_0^2}$	$y_g = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$	$y = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{C}{\omega_0^2}$ où A et B sont des constantes déterminées par les CI: $y(t = 0) = y_0 = \frac{C}{\omega_0^2} + A$ et $\dot{y}(t = 0) = B\omega_0$ 
$\ddot{y} - \omega_0^2 y = C$	$y_p = \frac{-C}{\omega_0^2}$	Equation caractéristique: $r^2 - \omega_0^2 = 0$ donc $r = \pm \omega_0$ et $y_g = Ae^{+\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$	$y(t) = Ae^{+\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t} - \frac{C}{\omega_0^2}$ où A et B sont des constantes déterminées par les CI: $y(t = 0) = y_0 = A + B - \frac{C}{\omega_0^2}$ et $\dot{y}(t = 0) = A\omega_0 - B\omega_0$

Cas particulier de l'oscillateur amorti

On doit résoudre $\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = C$ où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur et Q le facteur de qualité d'autant plus grand que les frottements sont faibles ($Q \rightarrow \infty : \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 : O.H.$)

$[\omega_0] = \text{rad.s}^{-1}$ Q sans unité

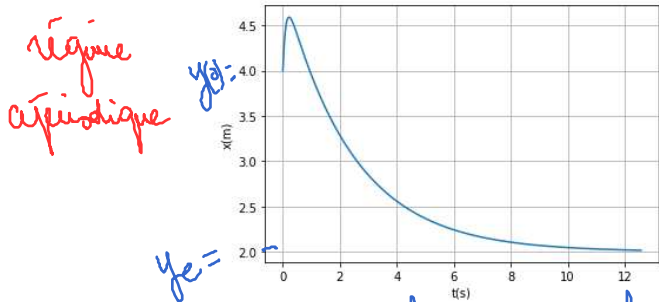
La solution particulière (c'est la position d'équilibre) est: $y_p = y_e = \frac{C}{\omega_0^2}$

Pour trouver la solution générale, on écrit l'équation caractéristique et son discriminant:

$$\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q}\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

On observe trois régimes différents en fonction du signe du discriminant:

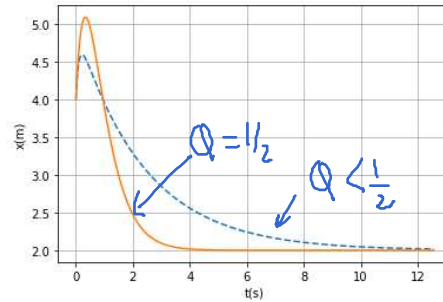


$\Delta > 0$ $Q < \frac{1}{2}$ beaucoup de frottements

$$\lambda_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

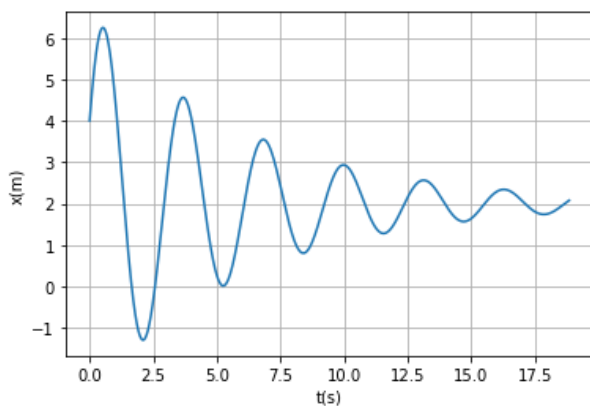
$$y(t) = y_e + Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$



$\Delta = 0$ $Q = \frac{1}{2}$

$$\lambda = -\frac{\omega_0}{2Q}$$

$$y(t) = y_e + (At + B)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$$



$$\lambda = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \boxed{-\frac{\omega_0}{2Q}} \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$y(t) = y_e + e^{\boxed{-\frac{\omega_0}{2Q}} t} \left(A \cos(\boxed{\omega} t) + B \sin(\boxed{\omega} t) \right)$$

fraction de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Q est voisin du vide d'oscillations observées (ici $Q \approx 5$)

L'écrément logarithmique:

$$\delta = \ln \left(\frac{y(t) - y_e}{y(t+T) - y_e} \right) = \ln \left[\frac{e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}{e^{-\frac{\omega_0 (t+T)}{2Q}}} \frac{\text{fct de période } T}{\text{fct de période } T} \right] = \ln \left(e^{\frac{\omega_0 T}{2Q}} \right) = \frac{\omega_0 T}{2Q} \approx \frac{\pi}{Q}$$

l'élève dit souvent que

$$T \approx T_0 \text{ car } T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$$