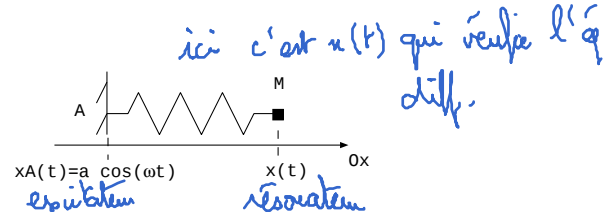
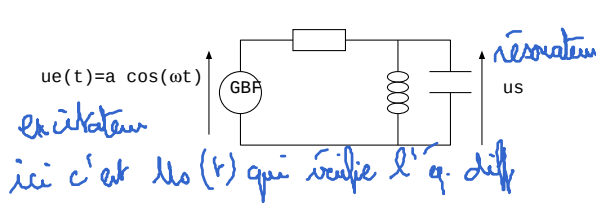


Régime sinusoïdal forcé

I. Principe de la méthode

On cherche à résoudre une équation différentielle de la forme: $\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \cos(\omega t)$

Cette équation se rencontre par exemple dans les situations suivantes:



La solution de cette équation différentielle comprend:

- une solution générale qui tend rapidement vers zéro et qui caractérise le régime *transitoire*
- une solution particulière de la forme $y_p(t) = Y_0 \cos(\omega t + \varphi)$ qui caractérise le régime *permanent*

Quand on se place en régime sinusoïdal forcé, on se place à la fin du régime transitoire donc la solution de l'équation différentielle est $y(t) = y_p(t) = Y_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Point commun entre l'excitateur et le résonateur: *ils oscillent à la même pulsation ω*

Différences entre l'excitateur et le résonateur: *ils n'ont pas la même amplitude, ils n'oscillent pas en phase*

Donc on connaît déjà la forme de la solution de l'équation différentielle et on cherche à trouver les expressions de *l'amplitude Y0* et du *déphasage φ* en fonction de ω. Pour cela, les mathématiques proposent de passer en notation complexe.

Passage de la notation réelle à la notation complexe

$$\cos(\omega t) \rightarrow e^{j\omega t}$$

$$\dot{y} \rightarrow j\omega y$$

$$y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \phi) \rightarrow y = Y_0 e^{j(\omega t + \phi)} = Y_0 e^{j\phi} e^{j\omega t}$$

Y0 e^{jφ} appelle amplitude complexe

$$\ddot{y} \rightarrow (j\omega)^2 y = -\omega^2 y$$

On transforme l'équation différentielle en notation complexe et on en déduit l'amplitude complexe $\underline{Y} = Y_0 e^{j\phi}$.

On en déduit ensuite $Y_0 = |\underline{Y}|$ et $\phi = \arg(\underline{Y})$

II. Outils mathématiques

$$|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(a + jb)^* = a - jb \quad (\text{conjugé})$$

$$\left| \frac{a + jb}{c + jd} \right| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

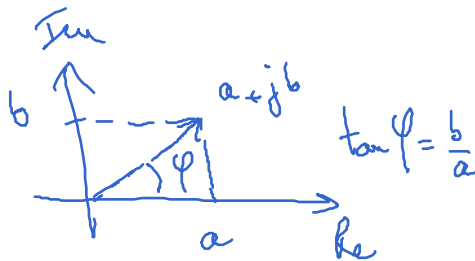
$$|(a + jb)(c + jd)| = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

$$\arg(a + jb) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\arg(jb) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(-4) = \pi$$

$$\arg(-5j) = -\frac{\pi}{2}$$



$$\arg\left(\frac{a + jb}{c + jd}\right) = \arg(a + jb) - \arg(c + jd)$$

$$\arg((a + jb)(c + jd)) = \arg(a + jb) + \arg(c + jd)$$

III. Applications

1. Application 1

En régime forcé, la solution de l'équation différentielle $\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \cos(\omega t)$ est de la forme $y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \phi)$. Exprimer Y_0 et ϕ en fonction de ω , étudier la résonance et tracer l'allure de Y_0 en fonction de ω pour $Q = 0,5$ et $Q = 5$.

On utilise la notation complexe : $\underline{y} = \underline{Y_0} e^{j\phi} e^{j\omega t}$
 $\underline{Y}$: amplitude complexe

On transforme l'éq. diff. en notation complexe :
 $(j\omega)^2 \underline{y} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{y} + \omega_0^2 \underline{y} = A_0 e^{j\omega t}$ on divise par $e^{j\omega t}$,
 $\underline{y}$ devient $\underline{Y}$

$$(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{Y} = A_0$$

$$\text{Soit } \underline{Y} = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

$$Y_0 = |\underline{Y}| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

$$\phi = \arg \underline{Y} = -\arg(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q})$$

$$= -\arctan\left(\frac{\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

La résonance correspond à un maximum d'amplitude, on doit étudier le maximum de Y_0 , pour cela on étudie le minimum de

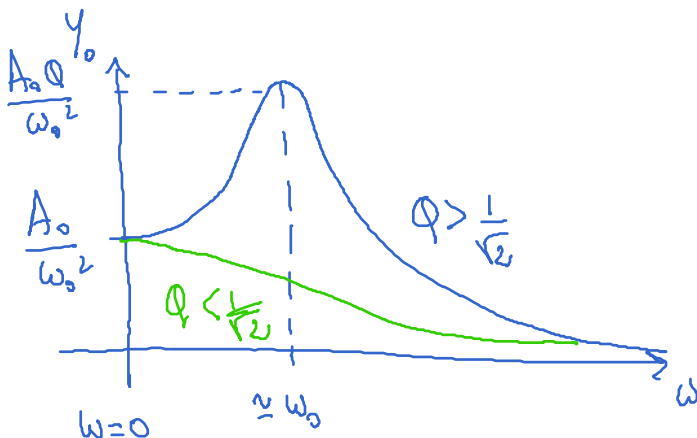
$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}$$

$$f'(\omega) = 2(-2\omega)(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{2\omega\omega_0^2}{Q^2} = 2\omega \left[-2\omega_0^2 + 2\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2} \right] \stackrel{\text{recherche du minimum}}{=} 0$$

$$\text{pour } \omega = 0 \text{ et pour } \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2Q^2} > 0 \text{ pour } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{donc il n'y a résonance que pour } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ soit pour } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx \omega_0$$

$$Y_0(\omega = \omega_r) \approx \frac{Q A_0}{\omega_0^2}$$



2. Application 2

En régime forcé, la solution de l'équation différentielle $\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \omega \cos(\omega t)$ est de la forme $y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \phi)$. Exprimer Y_0 et ϕ en fonction de ω , déterminer la pulsation de résonance et montrer qu'il y a une résonance pour toute valeur de Q . Tracer l'allure de Y_0 en fonction de ω pour $Q = 1$ et $Q = 5$.

On utilise la notation complexe: $y = Y_0 e^{j\omega t} e^{j\phi} = \underbrace{Y_0 e^{j\phi}}_{Y} e^{j\omega t}$
 Y : amplitude complexe que l'on cherche

On transforme l'éq. diff. en notation complexe:

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \omega e^{j\omega t}$$

on divise par $e^{j\omega t}$
 $\ddot{y}$ devient $\underline{Y}$

$$(j\omega)^2 \underline{Y} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{Y} + \omega_0^2 \underline{Y} = A_0 \omega$$

$$\underline{Y} = \frac{A_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$$

$$Y_0 = |\underline{Y}| = \frac{A_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}}$$

$$\phi = \arg \underline{Y} = -\arg(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q})$$

$$= -\arctan\left(\frac{\omega \omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)$$

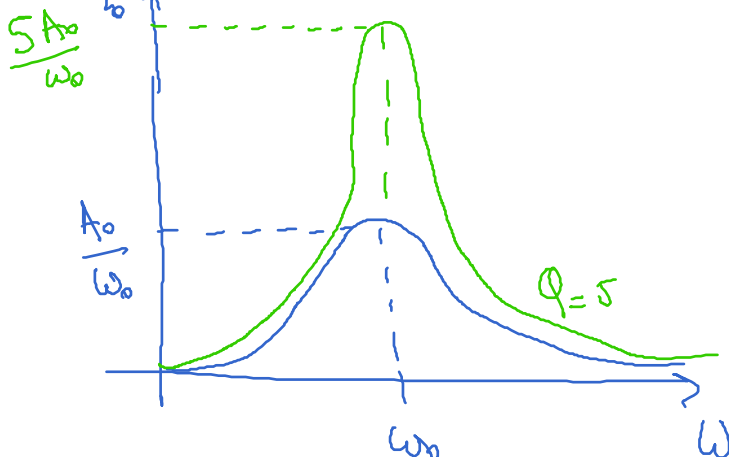
On cherche le maximum de Y_0 , on met Y_0 sous la forme d'une fraction avec un numérateur constant et on étudie le minimum du dénominateur.

$$Y_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}}}$$

$$f(\omega) = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}$$

$$f'(\omega) = 2\left(-\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right) = 0 \text{ pour } \omega = \omega_0$$

Il y a résonance pour $\omega = \omega_0$ et $Y_{0\max} = Y_0(\omega = \omega_0) = \frac{QA_0}{\omega_0}$



Plus Q est grand, plus Y_0 à résonance est grand et plus le pic est étroit.