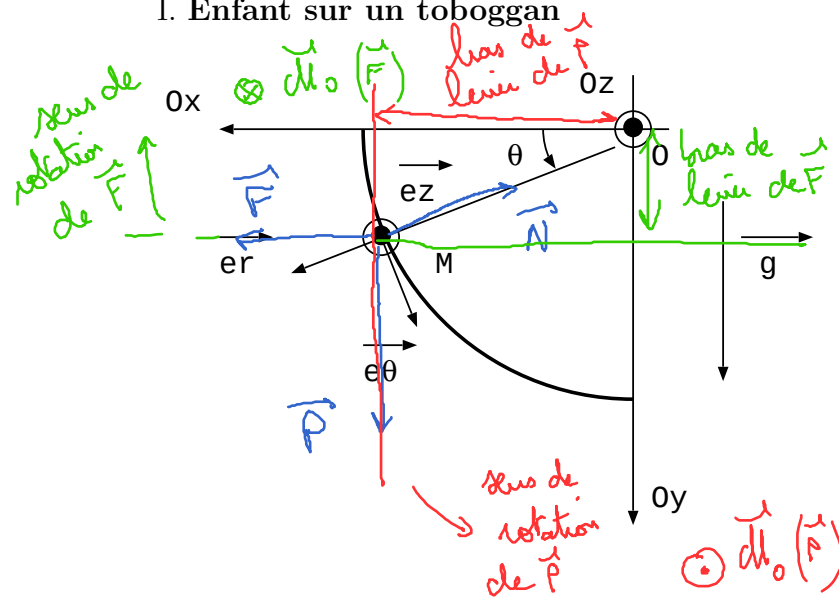


Correction TD sur le TMC par rapport à un point

I. Enfant sur un toboggan



$$\begin{aligned}
 1) \quad \vec{L}_O(M)_R &= \vec{OM} \wedge m \vec{v}(M)_R \\
 &= R \vec{e}_r \wedge m R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\
 &= m R^2 \dot{\theta} \vec{e}_y
 \end{aligned}$$

2) $\frac{d}{dt}(\vec{L}_O(\vec{N})) = \vec{0}$ car la réaction normale ne peut pas faire tourner M autour de O.

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_O(\vec{F})) = \|\vec{F}\| \times \underbrace{R \sin \theta}_{\text{bras de levier de } \vec{F}} \times (-\vec{e}_y)$$

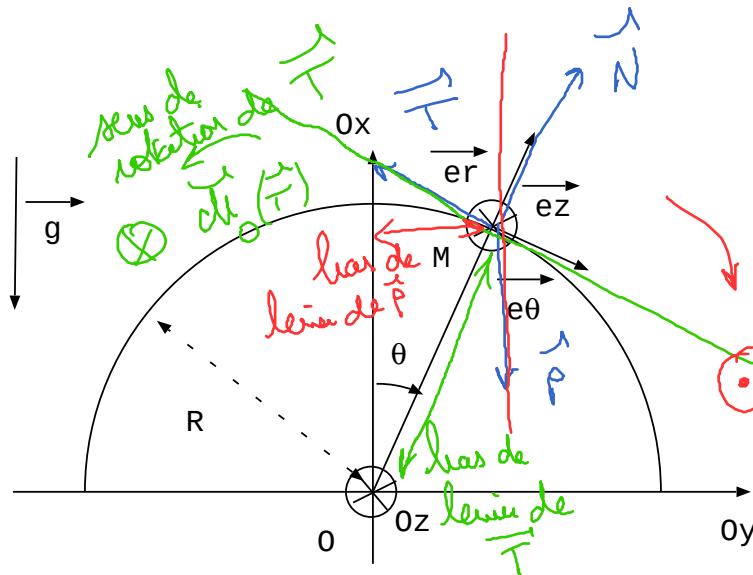
$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_O(\vec{P})) = \|\vec{P}\| \times \underbrace{R \cos \theta}_{\text{bras de levier de } \vec{P}} \times \vec{e}_y$$

3) On applique le TMC à M ds R galiléen : $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt}\bigg|_R = \frac{d}{dt}(\vec{L}_O(\vec{N})) + \frac{d}{dt}(\vec{L}_O(\vec{F})) + \frac{d}{dt}(\vec{L}_O(\vec{P}))$

$$\text{soit } m R^2 \ddot{\theta} \vec{e}_y = -\|\vec{F}\| R \sin \theta \vec{e}_y + m g R \cos \theta \vec{e}_y$$

$$\text{d'où } \boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{R} \cos \theta + \frac{\|\vec{F}\|}{m R} \sin \theta = 0}$$

II. Objet sur une demi-sphère



$$1) \vec{L}_O(M)_R = \vec{OM} \wedge m \vec{v}(M)_R = R \vec{e}_r \wedge m R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m R^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$2) \frac{d}{dt} \vec{L}_O(\vec{N}) = \vec{0} \text{ car } \vec{N} \text{ ne peut pas faire tourner } M \text{ autour de } O$$

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = + mg \times \underbrace{R \sin \theta}_{\text{bras de levier de } \vec{P}} \times \vec{e}_y$$

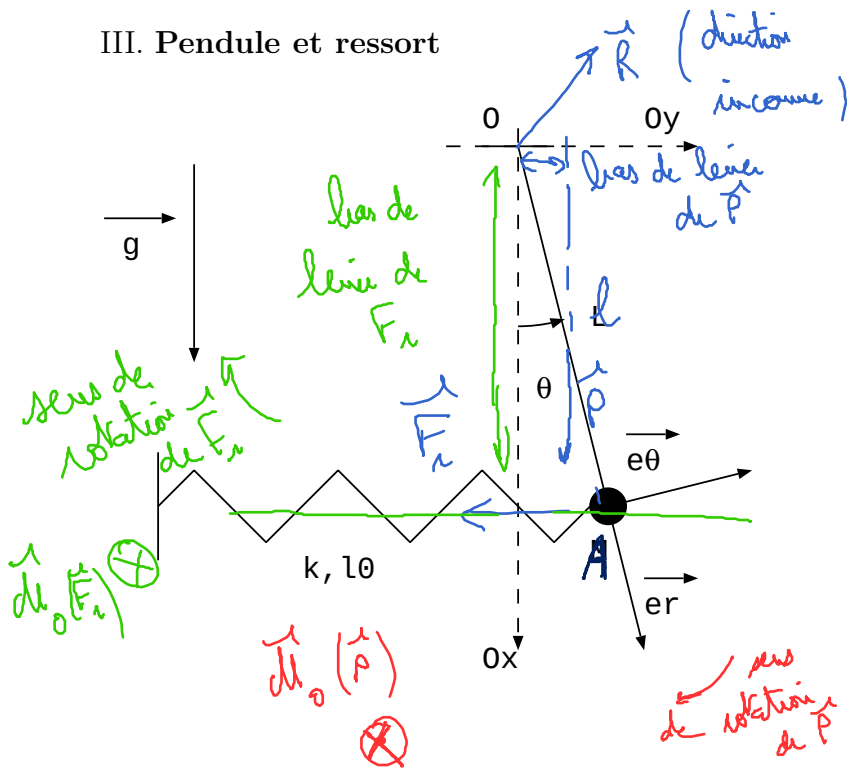
$$\vec{M}_O(\vec{T}) = \|\vec{T}\| \times R \times (-\vec{e}_y)$$

$$3) \text{TM C appliqué à } M \text{ dans } R \text{ galiléen : } \frac{d}{dt} \vec{L}_O(M)_R = \vec{M}_O(\vec{N}) + \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T})$$

$$\text{soit } m R^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z = mg R \sin \theta - \|\vec{T}\| R$$

$$\text{d'où } \boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{R} \sin \theta = - \frac{\|\vec{T}\|}{m R}}$$

III. Pendule et ressort



1) $\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{0}$ car la liaison pivot est idéale

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = mg \times \underbrace{\frac{l}{2} \sin \theta}_{\text{bras de levier de } \vec{P}} \times (-\vec{e}_y) \approx -mg \frac{l}{2} \theta \vec{e}_y$$

θ petit
 $\sin \theta \approx \theta$

$$\vec{F}_n = -k(l - l_0) \vec{u}_{\text{spring}} \rightarrow \vec{u} = -k(l + l \sin \theta - l_0) \vec{e}_y \approx -kl \theta \vec{e}_y$$

θ petit

$$\vec{M}_O(\vec{F}_n) = kl \theta \times \underbrace{l \cos \theta}_{\text{bras de levier de } \vec{F}_n} \times (-\vec{e}_y) \approx -kl^2 \theta \vec{e}_y$$

θ petit
 $\cos \theta \approx 1$

3) On applique le TMC à la tige dans R: $J \frac{d\omega}{dt} = J \ddot{\theta} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_O(\vec{P})}{dt} + \frac{d\vec{L}_O(\vec{R})}{dt} + \frac{d\vec{L}_O(\vec{F}_n)}{dt}$

$$\text{soit } J \ddot{\theta} = -\left(mg \frac{l}{2} + kl^2\right) \theta$$

$$\text{d'où } \ddot{\theta} + \left(\frac{mg \frac{l}{2} + kl^2}{J}\right) \theta = 0$$

on reconnaît l'éq. d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg \frac{l}{2} + kl^2}{J}}$

$$\text{soit la période propre } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg \frac{l}{2} + kl^2}}$$