

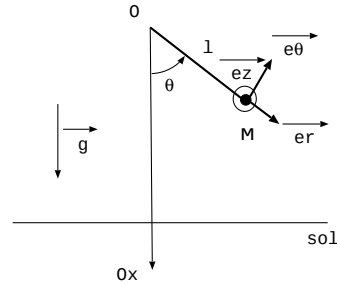
DS 1 de physique

Le sujet comprend deux exercices à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroté les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages. L'annexe pour python se trouve en fin de sujet.

Tous les résultats doivent être encadrés et justifiés. Quand vous utilisez une loi il faut donner le nom de la loi et préciser les hypothèses d'application.

I. Stabilité d'une balançoire

Un enfant sur une balançoire est assimilé à un pendule simple de longueur l et de masse m_0 en M . Ce pendule est suspendu au bâti de la balançoire en O . On repère la position de M par l'angle θ que fait le pendule par rapport à la verticale descendante Ax . Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Donnée: $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.



L'enfant est propulsé à la vitesse $\vec{v}_0$ depuis la position verticale. Ensuite on le laisse évoluer librement. On suppose que les frottements sont négligeables.

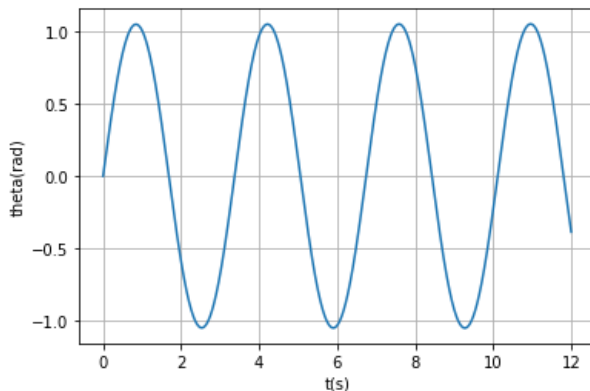
1. Faire un bilan des forces qui s'exercent sur le pendule M et montrer qu'il constitue un système conservatif. Dédurre des propriétés d'un système conservatif que la norme de la vitesse à une position θ s'écrit $v = \sqrt{v_0^2 - 2gl(1 - \cos\theta)}$. En déduire l'expression de θ_m , l'amplitude maximale des oscillations.

2. Dédurre du théorème du moment cinétique, l'équation différentielle notée (*) vérifiée par $\theta(t)$. Que devient cette équation pour des petits angles? En déduire la période propre T_0 des oscillations du pendule.

On propose de résoudre l'équation (*) en utilisant la méthode d'Euler sous python. On donne le code suivant et le résultat de son exécution.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Données numériques
5 l,m0,g,v0,theta0,N=2.5,20,10,5,0,1e5
6 dt=12/N
7
8 # Résolution de l'équation différentielle
9 # par la méthode d'Euler
10 ltheta=[theta0]
11 lt=[0]
12 lthetapoint=[v0/l]
13
14 for i in range(N):
15     a=-g/l*np.sin(ltheta[i])
16     lthetapoint.append(instruction 1)
17     ltheta.append(instruction 2)
18     lt.append(instruction 3)
19
20 # Tracé de theta(t)
21 plt.plot(instruction 4)
22 plt.grid()
23 plt.xlabel('instruction 5')
24 plt.ylabel('instruction 6')
25 plt.show()
```

Courbe obtenue après exécution du code



3. Utiliser les valeurs numériques du code, pour calculer les valeurs attendues de θ_m , en degré et en radian, et de T_0 . Comparer ces valeurs à celles que vous lisez sur la courbe obtenue. Commenter.

4. Pour appliquer la méthode d'Euler, on discrétise le temps, on note dt le pas de temps. On crée une liste

des temps nommée lt qui comprend des termes de la forme $t_i = i dt$ et les listes $ltheta$ et $lthetapoint$ qui contiennent respectivement les termes de la forme $\theta_i = \theta(t_i)$ et $\dot{\theta}_i = \dot{\theta}(t_i)$.

4.a. Exprimer $\dot{\theta}(t + dt)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$, $\ddot{\theta}(t)$ et dt . Exprimer également $\theta(t + dt)$ en fonction de $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et dt .

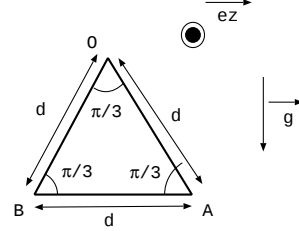
4.b. Que représente a ligne 15? Ecrivez sur votre copie les instructions 1,2 et 3 qui complètent les lignes 16, 17 et 18.

4.c. Compléter les instructions 4,5 et 6.

5. Dédurre de la RFD appliquée à M dans le référentiel d'étude galiléen, que la tension du fil en M s'écrit

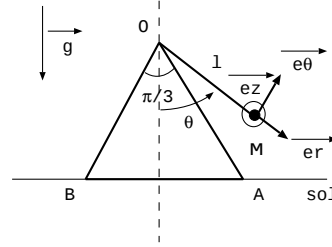
$$T = \frac{m_0 v_0^2}{l} + m_0 g (3 \cos \theta - 2).$$

Le bâti de la balançoire est composé de trois barres identiques OA , OB et AB de même masse m et de longueur d . Ces trois barres forment le triangle équilatéral OAB . Les angles au sommet en A , O et B sont égaux à $\pi/3$. Le bâti repose sur le sol sur la barre OB , le bâti n'est pas fixé sur le sol.



6. Représenter sur votre copie le bâti de la balançoire et les forces poids notées $\vec{P}_{OA}$, $\vec{P}_{OB}$ et $\vec{P}_{AB}$ exercées respectivement sur chacune des barres OA , OB et AB . Exprimer les moments scalaires de chacune de ces forces par rapport à l'axe Az . En déduire que le moment résultant des forces poids sur le bâti calculé par rapport à Az s'écrit: $M_{Az}(\vec{P}) = \frac{3mgd}{2}$.

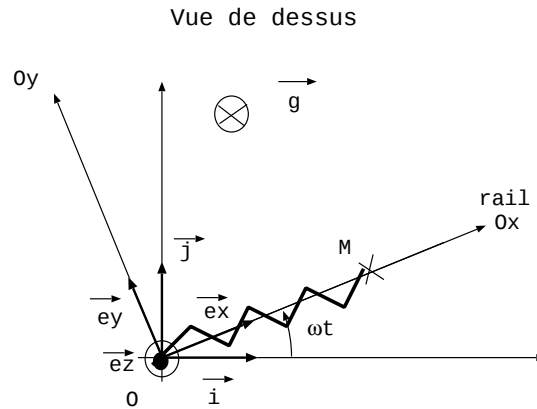
7. On note $\vec{F}$ la force exercée par la corde sur le bâti de la balançoire en O . Cette force a la même norme que la tension de la corde en M , exprimer le moment de la force exercée par la corde sur le bâti par rapport à l'axe Az .



8. Expliquer en quelques mots, pourquoi ne pas fixer le bâti de la balançoire au sol est-il dangereux pour l'enfant?

II. Ressort en rotation

On considère un point matériel M , de masse m qui peut se déplacer sans frottement le long d'un rail (Ox) toujours **horizontal** en rotation uniforme autour de l'axe Oz **vertical**. Le vecteur vitesse angulaire de rotation du rail par rapport au sol est $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$. Le point M est relié à O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . On note $x(t)$ la position de M sur le rail soit $OM = x(t)$.



On note $\mathcal{R}(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{e}_z)$ le référentiel galiléen lié au sol et $\mathcal{R}'(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ le référentiel tournant lié au rail.

1. Exprimer la vitesse et l'accélération de M dans le référentiel mobile $\mathcal{R}'$ en fonction des données.

2. Quel devrait être le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ pour que $\mathcal{R}'$ soit galiléen? Préciser le mouvement de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ et en déduire les expressions des forces d'inertie exercées sur M dans $\mathcal{R}'$, en fonction de m , Ω , $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et des vecteurs de base $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$. Représenter ces forces sur un schéma dans le cas où $\dot{x} > 0$.
3. La réaction du rail sur M s'écrit $\vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z$. On néglige tout frottement, en déduire que l'une des composantes de la réaction est nulle. Préciser laquelle en justifiant votre réponse.
4. Déduire de la RFD appliquée à M dans $\mathcal{R}'$ que $x(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme:

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 - \Omega^2)x = \omega_0^2 l_0 : \text{équation (*)}$$

Exprimer ω_0 en fonction des données.

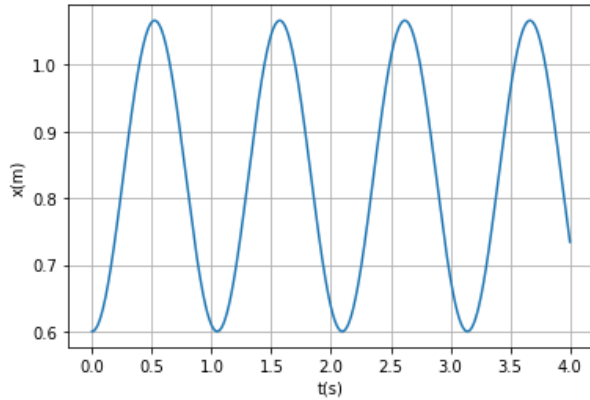
5. Montrer que le système est conservatif et exprimer son énergie mécanique dans $\mathcal{R}'$ en fonction de m , $\dot{x}$, k , l_0 , x et Ω . Retrouver l'équation différentielle de la question précédente.
6. Dans cette question, on se place dans le cas où le rail ne tourne pas trop vite soit $\omega_0 > \Omega$.

6.a. On note x_p la solution particulière de l'équation différentielle (*), exprimer x_p en fonction de ω_0 , Ω et l_0 .

6.b. On pose $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}$. Résoudre l'équation différentielle (*) dans le cas où $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$. Exprimer $x(t)$ en fonction de x_p , x_0 , ω et t .

On donne le code suivant et le résultat de son exécution:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 k,m,l0=10,0.1,...
5 omega0=instruction 1
6 x0=.....
7 def f(t,Omega):
8     a=(omega0**2-Omega**2)**0.5
9     b=l0*omega0**2/a**2
10    return instruction 2
11 t=instruction 3
12 plt.plot(instruction 4)
13 plt.xlabel(instruction 5)
14 plt.ylabel(instruction 6)
15 plt.grid()
16 plt.show()
```



- 6.c.** Lire sur la courbe, les valeurs numériques de T (la période des oscillations), de x_0 et de x_e , la position d'équilibre. Comment vérifie-t-on sur la courbe que $\dot{x}(t=0) = 0$
- 6.d.** Déduire de calculs, les valeurs numériques de Ω et de l_0 .
- 6.e.** Faire un phrase pour décrire le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$ dans ce cas.
- 6.f.** Dans le code, que représentent a et b lignes 8 et 9? Ecrire les instructions 1 à 6 sur votre copie.
7. Dans cette question, on se place dans le cas où le rail tourne vite soit $\omega_0 < \Omega$. On note x_p la solution particulière de l'équation (*).

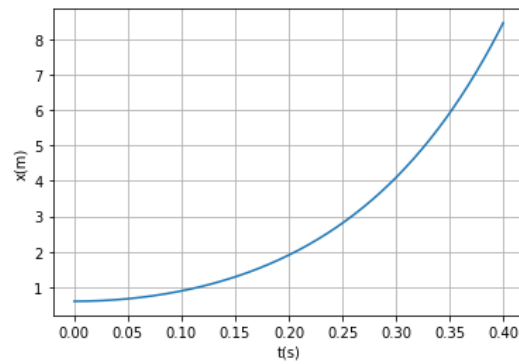
7.a. On pose $\omega = \sqrt{\Omega^2 - \omega_0^2}$. Résoudre l'équation différentielle (*) dans le cas où $x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, exprimer $x(t)$ en fonction de x_p , x_0 , ω et t .

On donne le code suivant et le résultat de son exécution:

```

18 def g(t,Omega):
19     c=(Omega**2-omega0**2)**0.5
20     d=-l0*omega0**2/c**2
21     return instruction 7
22 t=np.linspace(instruction 8)
23 plt.plot(t,g(t,12))
24 plt.xlabel(instruction 5)
25 plt.ylabel(instruction 6)
26 plt.grid()
27 plt.show()

```



7.b. Faire une phrase pour décrire le mouvement de M dans $\mathcal{R}'$.

7.c. Que représentent c et d lignes 19 et 20? écrire les instructions 7 et 8 sur votre copie. Préciser la valeur numérique de Ω choisie pour cette simulation.

Annexe:

Bibliothèque MATPLOTLIB . PYPLOT

Cette bibliothèque permet de tracer des graphiques. Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `matplotlib.pyplot` a préalablement été importée à l'aide de la commande :

```
import matplotlib.pyplot as plt.
```

- Description : fonction permettant de tracer un graphique de n points dont les abscisses sont contenues dans le vecteur x et les ordonnées dans le vecteur y . Cette fonction doit être suivie de la fonction `plt.show()` pour que le graphique soit affiché.
- Argument d'entrée : un vecteur d'abscisses x (tableau de n éléments) et un vecteur d'ordonnées y (tableau de n éléments). La chaîne de caractères 'SC' précise le style et la couleur de la courbe tracée. Des valeurs possibles pour ces deux critères sont :

Valeurs possibles pour S (style) :

Description	Ligne continue	Ligne traitillée	Marqueur rond	Marqueur plus
Symbole S	-	--	o	+

Valeurs possibles pour C (couleur) :

Description	bleu	rouge	vert	noir
Symbole C	b	r	g	k

- Argument de sortie : un graphique.

```

x = np.linspace(3, 25, 5)
y = np.sin(x)
plt.plot(x,y,'-b') # tracé d'une ligne bleue continue
plt.title('titre_graphique') # titre du graphe
plt.xlabel('x') # titre de l'axe des abscisses
plt.ylabel('y') # titre de l'axe des ordonnées
plt.show()

```

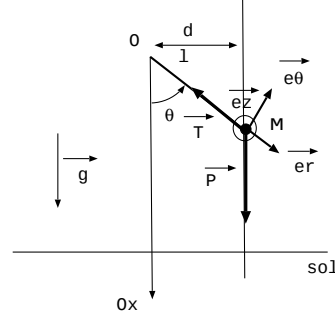
- `np.linspace(start, stop, N point)` :

- Description : renvoie un nombre d'échantillons espacés uniformément, calculés sur l'intervalle $[start, stop]$;
- Argument d'entrée : début, fin et nombre d'échantillons dans l'intervalle ;
- Argument de sortie : un tableau.

Commande	Résultat
<code>np.linspace(1, 4, 5)</code>	<code>[1., 1,75, 2,5, 3,25, 4.]</code>

III. Correction: balançoire

1. Le pendule, dans le référentiel d'étude supposé galiléen, est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension du fil $\vec{T}$. Le poids est conservatif d'énergie potentielle $E_{pp} = -m_0gx = -m_0gl \cos \theta$ et la tension du fil ne travaille pas, donc le système est conservatif, ce qui signifie que son énergie mécanique est constante. On écrit l'énergie mécanique en une position θ quelconque: $E_m = \frac{m_0v^2}{2} - m_0gl \cos \theta$ et on écrit l'énergie mécanique au point de départ où la vitesse est v_0 et où $\theta = 0$, on a $E_m = \frac{m_0v_0^2}{2} - m_0gl$.



La conservation de l'énergie mécanique s'écrit $\frac{m_0v^2}{2} - m_0gl \cos \theta = \frac{m_0v_0^2}{2} - m_0gl$ qui donne la relation demandée $v = \sqrt{v_0^2 - 2gl(1 - \cos \theta)}$.

Au maximum d'amplitude des oscillations, la vitesse est nulle, on a donc $0 = \sqrt{v_0^2 - 2gl(1 - \cos \theta_m)}$ soit $\theta_m = \arccos(1 - \frac{v_0^2}{2gl})$.

2. Le théorème du moment cinétique appliqué à M par rapport à O dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit $\frac{dL_O(\vec{M})}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T})$.

Le moment cinétique de l'enfant par rapport à O s'écrit $\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m_0 \vec{v} = l \vec{e}_r \wedge m_0 l \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m_0 l^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$.

Le moment de la tension du fil est nul car la tension du fil est incapable de faire tourner M autour de O .

Le poids fait tourner dans le sens opposé à θ donc son moment est selon $-\vec{e}_z$ et le bras de levier du poids est $d = l \sin \theta$. Ainsi on a $\vec{M}_O(\vec{P}) = -mgl \sin \theta \vec{e}_z$.

On obtient donc $m l^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$ soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ (équation (*)).

Pour des petits angles, l'équation devient $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$. ON reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et de période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

3. Les données numériques sont $l = 2,5 \text{ m}$, $m_0 = 20 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $v_0 = 5 \text{ m.s}^{-1}$.

AN: $\theta_m = \arccos(1 - \frac{v_0^2}{2gl}) = \arccos(1 - \frac{5.5}{2.10.2,5}) = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \approx 1 \text{ rad}$.

AN: $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2,5}{10}} = \pi = 3,14 \text{ s}$.

On lit sur la courbe $\theta_m \approx 1 \text{ rad}$, qui est en accord avec le résultat trouvé.

On lit sur la courbe $3T = 10,2 \text{ s}$ soit $T = 3,3 \text{ s} > T_0 = 3,1 \text{ s}$: en effet le pendule pour des grands angles ne se comportent pas comme un oscillateur harmonique et on observe que sa période augmente quand l'amplitude des oscillations augmente, ce qui paraît logique, puisqu'il a plus de distance à parcourir.

4. 4.a. On applique la relation donnée $f(t+dt) = f(t) + f'(t)dt$ soit $\dot{\theta}(t+dt) = \dot{\theta}(t) + \ddot{\theta}(t)dt$ et $\theta(t+dt) = \theta(t) + \dot{\theta}(t)dt$.

4.b. On lit ligne 15: $a = -\frac{g}{l} \sin \theta$, on reconnaît l'expression de $\ddot{\theta}$.

On a donc les relations de récurrence:

- $t_{i+1} = t_i + dt$ qui donne l'instruction 3: $lt[i] + dt$

- $\dot{\theta}_{i+1} = \dot{\theta}_i + \ddot{\theta}dt$ qui donne l'instruction 1: $ltheta[i] + a * dt$

- $\theta_{i+1} = \theta_i + \dot{\theta}_i dt$ qui donne l'instruction 2: $ltheta[i] + ltheta[i] * dt$

4.c. instruction 4: $lt, ltheta$ (pour avoir θ en ordonnée et t en abscisse)

instruction 5: $t(s)$

instruction 6: $theta(rad)$

La force d'inertie d'entraînement est conservative, son énergie potentielle s'écrit $E_{pie} = -\frac{m\Omega^2 HM^2}{2} = -\frac{m\Omega^2 x^2}{2}$.

La force de rappel élastique est conservative, son énergie potentielle s'écrit $E_{pr} = \frac{k}{2}(l - l_0)^2 = \frac{k}{2}(x - l_0)^2$.

Le système est conservatif, son énergie mécanique est constante, elle s'écrit $E_m = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\Omega^2 x^2}{2} + \frac{k}{2}(x - l_0)^2$.

On la dérive par rapport au temps pour retrouver l'équation différentielle précédente: $\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} - m\Omega^2 x\dot{x} + k(x - l_0)\dot{x}$. On simplifie par $\dot{x}$ et on retrouve la même équation différentielle que précédemment.

6. **6.a.** Quand on a $\omega_0 > \Omega$, on a $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega_0^2 l_0$, on reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}$.

La solution particulière de l'équation différentielle, qui représente aussi la position d'équilibre, s'écrit: $x_p = \frac{\omega_0^2 l_0}{\omega^2}$.

6.b. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit $x_g = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$.

On a donc $x(t) = x_p + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ qui vérifie les CI:

$x(t=0) = x_0 = x_p + A$ et $\dot{x}(t=0) = 0 = B\omega$ soit $B = 0$ et $A = x_0 - x_p$ donc $x(t) = x_p + (x_0 - x_p) \cos(\omega t)$.

6.c. On lit $3T = 3,2$ s soit $T \approx 1,07$ s.

On lit $x(t=0) = x_0 = 0,6$ m et $x_e = \frac{1,07 + 0,6}{2} = 0,83$ m.

La tangente à l'origine à la courbe $x(t)$ est horizontale donc la vitesse initiale est nulle.

6.d. On a trouvé $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}$ soit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{4\pi^2}{T^2}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{4\pi^2}{T^2}}$. AN: $k = 10$ N/m et $m = 0,1$ kg donc $\Omega = 8$ rad/s.

De même $x_e = \frac{l_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ soit $l_0 = (1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2})x_e$. AN: $l_0 \approx 0,31$ m.

6.e. Dans $\mathcal{R}'$, M oscille autour de sa position d'équilibre.

6.f. instruction 1: $(k/m)**0.5$ ou $\text{np.sqrt}(k/m)$

a représente ω , la pulsation de l'OH et b représente la solution particulière ou la position d'équilibre, l'instruction 2 est donc: $b + (x_0 - b) * \text{np.cos}(a * t)$

instruction 3: $\text{np.linspace}(0, 4, 1000)$ (on trace une fonction dont on connaît l'équation sur l'intervalle $[0, 4]$, on utilise 1000 points)

instruction 4: $t, f(t, 8)$, instruction 5: $'t(s)'$, instruction 6: $'x(m)'$

7. **7.a.** D'après l'équation différentielle, lorsque $\omega_0 < \Omega$, le système ne suit pas l'équation d'un oscillateur harmonique, on n'observe plus d'oscillations. Avec la définition de ω , on a $\ddot{x} - \omega^2 x = \omega_0^2 l_0$.

La solution particulière de l'équation différentielle s'écrit toujours: $x_p = \frac{\omega_0^2 l_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}$.

On écrit l'équation caractéristique: $r^2 - \omega^2 = 0$ soit $r = \pm \omega$.

On a donc $x_g(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$.

D'où la solution $x(t) = x_p + Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$ qui vérifie les CI:

$x(t=0) = x_p + A + B = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0 = (A - B)\omega$.

On a donc $A = B = \frac{x_0 - x_p}{2}$.

Soit $x(t) = x_p + \frac{x_0 - x_p}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$.

7.b. Le point matériel dans $\mathcal{R}'$ s'éloigne de plus en plus de O , le ressort ne fait que s'étirer sous l'effet de la force centrifuge qui est grande, le ressort va casser.

7.c. c représente ω défini dans l'énoncé et d représente x_p .

instruction 7: $d + (x_0 - d)/2 * (\text{np.exp}(c * t) + \text{np.exp}(-c * t))$, instruction 8: 0, 0.4, 1000

On trace $g(t, 12)$ soit $\Omega = 12$ rad/s.