

Correction exercice VI TD dynamique terrestre

Erratum: dans la question 1 de l'exo on demande en fonction de $\vec{u}_Z$ en fait c'est en fonction de $\vec{u}_r$ car on cherche le poids au point M.

- 1 Le poids est la somme de la force gravitationnelle et de la pseudo-force d'inertie d'entraînement.

Le poids s'écrit donc : $\vec{P} = -GmM_T \frac{\vec{u}_r}{r^2} + m\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ où $-GmM_T \frac{\vec{u}_r}{r^2}$ est la force gravitationnelle et $m\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ est la pseudo-force d'inertie d'entraînement.

On a donc bien : $\vec{g} = -GM_T \frac{\vec{u}_r}{r^2} + \Omega^2 \overrightarrow{HM}$.

À la surface de la Terre sa norme a un ordre de grandeur : $g_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- 2 La pseudo-force d'inertie de Coriolis s'exprime : $\vec{F}_{IC} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$.

En ordre de grandeur on a donc : $F_{IC} \sim 2m\Omega v_r$.

On a alors : $\frac{F_{IC}}{P} \sim \frac{2\Omega v_r}{g_0}$.

AN. $\frac{F_{IC}}{P} \sim \frac{2 \times \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \times 100}{10} \sim 10^{-3} \ll 1$.

On peut donc bien négliger la pseudo-force d'inertie de Coriolis devant le poids dans le cas du train TGV.

- 3 On calcule le rapport demandé à la surface de la Terre : $\frac{F_{ie}}{F_G} = \frac{\Omega^2 HM}{\frac{GM_T}{R_T^2}} = \frac{\Omega^2 HM R_T^2}{GM_T}$.

Ce rapport est maximal, lorsque la grandeur HM est maximale, soit pour $HM = R_T$.

On a alors : $\eta = \left(\frac{F_{ie}}{F_G}\right)_{\max} = \frac{\Omega^2 R_T^3}{GM_T}$.

AN. $\eta = \frac{\left(\frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60}\right)^2 \times (6,4 \cdot 10^6)^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24}} \sim 3 \cdot 10^{-3} \ll 1$.

L'écart maximal entre la pseudo-force d'inertie d'entraînement et la force gravitationnelle reste très faible, on peut donc généralement négliger l'effet inertiel et assimiler le poids à la force gravitationnelle.

- 4.a) L'énergie potentielle de gravitation s'exprime : $E_{pG}(M) = -\frac{GmM_T}{r}$.

- 4.b) La pseudo-force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle, on a donc : $\vec{F}_{ie} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{pe})$.

On a donc : $E_{pe} = -\int \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{\ell} = -\int m\Omega^2 \overrightarrow{HM} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 (\overrightarrow{HM})^2 + \text{cte}$.

En prenant une valeur nulle pour $r = 0$, donc pour $\overrightarrow{HM} = \vec{0}$, on retrouve l'expression indiquée dans le sujet, soit l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement : $E_{pe} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 (\overrightarrow{HM})^2$.

- 4.c) L'énergie potentielle de pesanteur est alors : $E_{pp} = E_{pG} + E_{pe} = -\frac{GmM_T}{r} - \frac{1}{2}m\Omega^2 (\overrightarrow{HM})^2$.

Par trigonométrie on a : $HM = r \sin(\theta)$.

Et donc finalement en coordonnées sphériques, on a : $E_{pp} = -\frac{GmM_T}{r} - \frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 \sin^2(\theta)$.