

TD dynamique terrestre

I. Rotation de la Terre

Quelle devrait être la période T de rotation de la Terre sur elle-même pour que le champ de pesanteur soit nul en tout point de l'équateur ? Calculer la durée du jour correspondante. Donnée : $R_T = 6370 \text{ km}$.

Réponse : $T = 83 \text{ min } 46 \text{ s}$

II. Force de Coriolis sur un avion

Un avion vole le long d'un méridien en se déplaçant du nord vers le sud à la latitude nord $\lambda = 35^\circ$ avec une vitesse de 1000 km/h relativement au référentiel terrestre. On donne $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Déterminer le sens et la direction de la force de Coriolis exercée sur l'avion. Que se passe-t-il si l'avion vole à la latitude sud $\lambda = 35^\circ$?

Calculer le rapport des normes de la force de Coriolis et du poids exercés sur l'avion.

III. La déviation vers l'est

Soit un projectile assimilé à un point matériel M abandonné sans vitesse initiale à l'altitude h à la verticale d'un point O de la Terre à la latitude λ . On néglige la résistance de l'air.

On assimile la terre à une sphère tournant autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire Ω . On note $\vec{g}_0$ le champ de pesanteur terrestre avec $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$. On note Oz , la verticale ascendante, Ox , la tangente au méridien passant par O , dirigée vers le sud, et Oy , la tangente au parallèle passant par O , dirigée vers l'est.

1. Préciser en quel point tombe l'objet lorsque l'on suppose le référentiel terrestre galiléen.
2. On tient compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre. Exprimer $\vec{\Omega}$ sur les vecteurs de base $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ et en déduire l'expression de la force d'inertie de Coriolis exercée sur le projectile en fonction des composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ de sa vitesse dans le référentiel terrestre.
3. En déduire les expressions de $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$. Pourquoi la force d'inertie d'entraînement n'intervient pas explicitement dans l'équation obtenue?

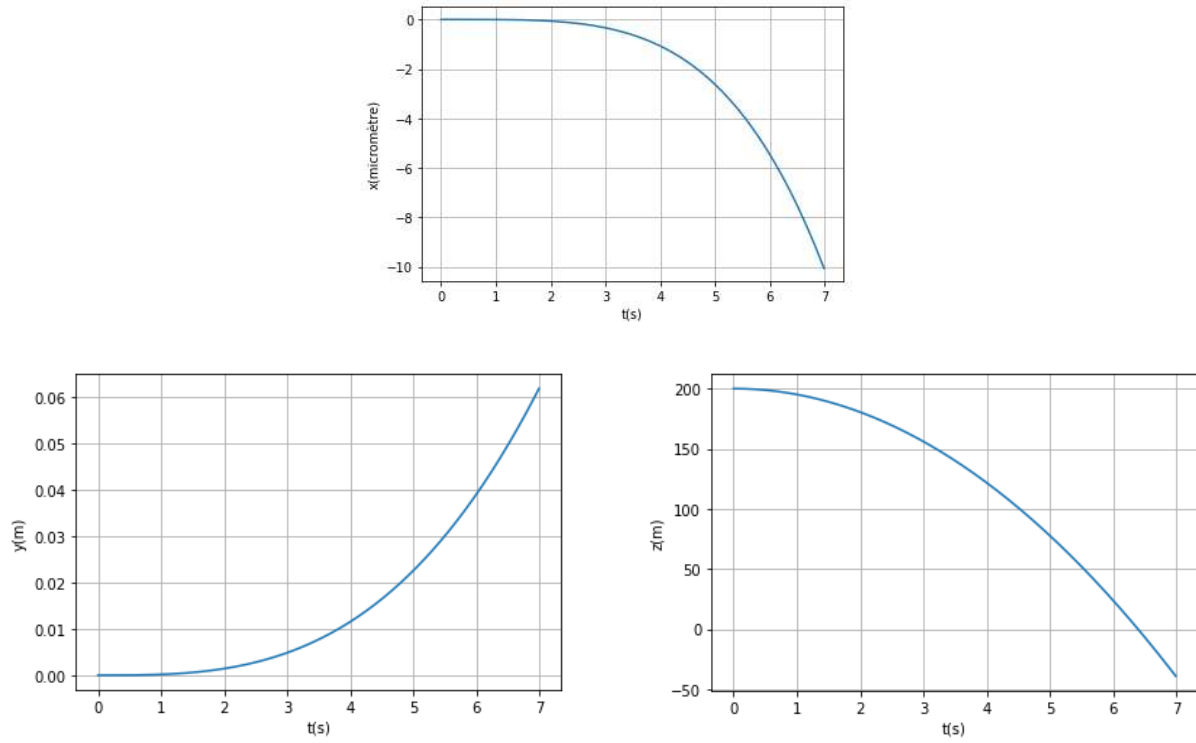
Le système d'équations différentielles à résoudre est un système d'équations couplées. On cherche à le résoudre numériquement par la méthode d'Euler. On donne le code suivant.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 h=200
5 g=9.8
6 omega=.....
7 lat=40*np.pi/180.
8 tau=0.01
9 N=700
10 lt, lx, ly, lz=[0],[0],[0],[h]
11 lvx, lvy, lvz=[0],[0],[0]
12 for i in range(N-1):
13     lt.append(lt[i]+tau)
14     ax=.....
15     ay=.....
16     az=.....
17     lvx.append(lvx[i]+ax*tau)
18     lvy.append(lvy[i]+ay*tau)
19     lvz.append(lvz[i]+az*tau)
20     lx.append(lx[i]+lvx[i]*tau)
21     ly.append(ly[i]+lvy[i]*tau)
22     lz.append(lz[i]+lvz[i]*tau)
```

Donner les valeurs numériques de la hauteur h de chute du projectile et de la latitude λ .

Dans ce code, lt , lx , ly et lz sont les listes du temps, de l'abscisse x , de l'ordonnée y et de la côte z . Compléter les lignes 6, 14, 15 et 16.

Ce code permet de tracer les courbes $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ (attention aux unités sur les axes des ordonnées).



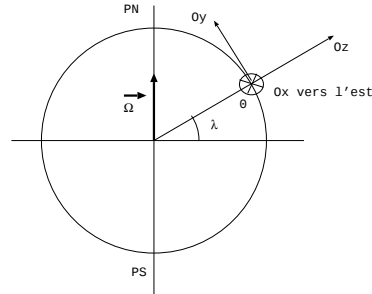
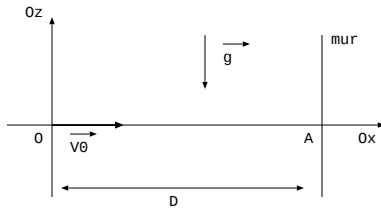
Comment vérifie-t-on sur les courbes que le projectile est bien abandonné sans vitesse initiale? Lire les coordonnées du projectile lorsqu'il atteint l'altitude de 150 m. Lire les coordonnées du point d'impact sur le sol. Le projectile est-il dévié vers l'est ou vers l'ouest? vers le sud ou vers le nord?

4. Exprimer la vitesse du projectile lorsque l'on suppose le référentiel terrestre galiléen.
5. Ecrire la RFD appliquée à M dans le référentiel terrestre non galiléen. On fait l'hypothèse que la vitesse du projectile est peu modifiée lorsque l'on tient compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre, cela revient à dire que l'on peut exprimer la force de Coriolis en prenant la vitesse trouvée dans la question précédente. En déduire les équations horaires du projectile.
6. Déterminer les coordonnées du point d'impact du projectile sur le sol. Faire l'AN pour $\lambda = 40^\circ$ et $h = 200$ m. Comparer aux résultats de la résolution numérique d'Euler.

Réponses: 3- déviation vers l'est de 4,8 cm et vers le nord de 7 μ m 5- $x(t) = 0$, $y(t) = \Omega g \cos \lambda \frac{t^3}{3}$,
 $z(t) = h - \frac{gt^2}{2}$

IV. Hockeyer

Un hockeyeur se trouve en un point O , de latitude Nord λ , sur une surface gelée horizontale parfaitement lisse et sans frottements. À l'aide de sa crosse, il propulse sur un axe Ox dirigé vers l'est, un palet de 300 g à la vitesse $v_0 = 10$ m/s vers un mur vertical situé à la distance : $D = 20$ m.



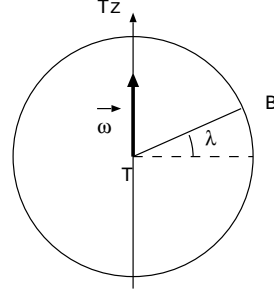
1. Exprimer le vecteur rotation propre de la Terre $\vec{\Omega}$ et calculer Ω .

2. Lorsque le référentiel terrestre est supposé galiléen, exprimer le vecteur vitesse du palet en fonction du temps et préciser en quel point le palet touche le mur.
3. Ecrire la RFD appliquée au palet dans le référentiel terrestre non galiléen. Pour exprimer la force d'inertie de Coriolis, on fait l'hypothèse que le vitesse relative du palet est identique à la vitesse qu'il a, lorsque le référentiel terrestre est galiléen (vitesse obtenue question 2).
4. En déduire les équations horaires du mouvement du palet et montrer que l'abscisse du point de contact du palet sur le mur est $y_{mur} = -\frac{\Omega \sin \lambda D^2}{v_0}$. Faire l'AN.

V. Base de lancement d'une fusée

1. Rappeler la définition des référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}_g$. Dans toute la suite de l'étude, $\mathcal{R}_g$ sera considéré comme galiléen.

2. La Terre, assimilée à une sphère de rayon $R_T = 6\,400\text{ km}$ est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Sud-Nord Tz à la vitesse angulaire Ω .



2.a. Donner la valeur numérique de Ω .

2.b. Une fusée de masse $m_F = 4,0 \cdot 10^5\text{ kg}$ se trouve initialement immobile par rapport à la Terre en un point B sur sa base de lancement à la latitude λ .

Donner, **par rapport au référentiel géocentrique**, la nature de la trajectoire de la fusée, calculer le module v_B de sa vitesse et son énergie mécanique pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-Unis ($\lambda_1 = 28,5^\circ$) et pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2^\circ$). On donnera les vitesses en m/s et en km/h .

2.c. La même fusée se trouve maintenant sur une orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Terre avec la vitesse v_0 dans le référentiel géocentrique. Déterminer l'expression de v_0 et de son énergie mécanique en fonction des données. Données : $r_0 = 80\,000\text{ km}$, masse de la Terre: $M_T = 6 \cdot 10^{24}\text{ kg}$ et constante de gravitation universelle: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ SI}$.

2.d. Calculer la variation relative d'énergie mécanique de la fusée dans le référentiel sur sa trajectoire circulaire lorsqu'elle est en orbite et son énergie mécanique lorsqu'elle est sur base de lancement à Cap Canaveral. Même calcul lorsque la fusée décolle de Kourou. Les calculs de l'énergie mécanique se font dans le référentiel de Copernic. Quelle base de lancement faut-il préférer?

Réponses: 2b- $v_1 = 410\text{ m/s}$ et $v_2 = 465\text{ m/s}$ 2c- $v_0 = 2,24\text{ km/s}$

VI. Poids et énergie potentielle de pesanteur (CCINP MP 2026)

Données utiles pour l'ensemble du sujet	
Rayon de la Terre supposée sphérique	$R_T = 6,4 \cdot 10^6\text{ m}$
Masse de la Terre	$M_T = 6,0 \cdot 10^{24}\text{ kg}$
Constante d'attraction universelle	$G = 6,7 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe sud-nord	$\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5}\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

L'étude de certains mouvements peut se faire dans le référentiel géocentrique $R(OXYZ)$ (figure 2), qui est supposé galiléen et dont l'origine est O , le centre de la Terre. Le référentiel terrestre $R'(O'X'Y'Z)$ (figure 2), lié à la Terre, effectue un mouvement de rotation uniforme, de vecteur $\vec{\Omega}(R'/R) = \Omega \vec{u}_z$ par rapport au référentiel géocentrique où $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe OZ .

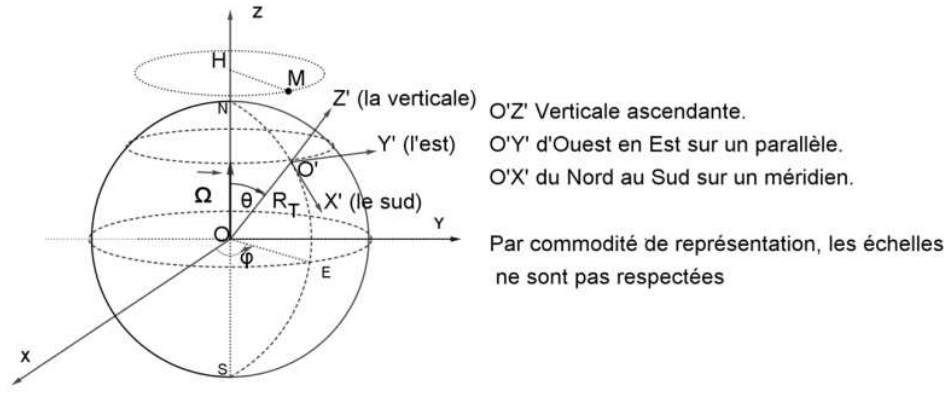


Figure 2 - Référentiel géocentrique et référentiel terrestre

Un point matériel M , de masse m , situé à la distance $r = OM$ du centre de la Terre est soumis à l'attraction gravitationnelle et à d'autres forces. On désigne par H , le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles.

1. Définir le poids $\vec{P}$ d'un corps et exprimer le champ de pesanteur défini par $\vec{P} = m\vec{g}(M)$ en fonction de $\mathcal{G}$, m , M_T , $r = OM$, $\vec{u}_r$, Ω et $\overrightarrow{HM}$. Donner l'ordre de grandeur de sa norme à la surface de la Terre.

2. En général, la force de Coriolis peut être négligée devant le poids. Justifier cette approximation en prenant l'exemple d'un train TGV roulant à 360 km/heure.

3. Montrer que le rapport des normes du terme d'inertie d'entraînement et du terme de gravitation à la surface de la Terre est majoré par une valeur η qu'on exprimera en fonction de Ω , $\mathcal{G}$, M_T et R_T . Déterminer l'ordre de grandeur de la quantité η et commenter.

4. **4.a.** La force gravitationnelle $\vec{F}_G(M)$ dérive de l'énergie potentielle de gravitation $E_{pG}(M)$. Donner l'expression de celle-ci pour une masse m dans le champ de la Terre, en fonction de $\mathcal{G}$, m , M_T et $r = OM$ en prenant une valeur nulle à l'infini.

4.b. La force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}$ dérive de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement $E_{pie}(M)$. Établir son expression en fonction de m , Ω et HM pour une masse m dans le champ de la Terre, en prenant une valeur nulle en $HM = 0$.

4.c. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(M)$ en fonction de Ω , $\mathcal{G}$, M_T , R_T , $r = OM$ et θ .

Réponses: 3- $\eta = \frac{\Omega^2 R_T^3}{\mathcal{G} M_T}$ 4c- $E_{pp}(M) = -\mathcal{G} \frac{m M_T}{r} - m \Omega^2 \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2}$