

DS 2 de physique

Le sujet comprend trois exercices à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroté les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.

Tous les résultats doivent être encadrés et justifiés. Quand vous utilisez une loi il faut donner le nom de la loi et préciser les hypothèses d'application.

Annexe python:

Bibliothèque MATPLOTLIB . PYPLOT

Cette bibliothèque permet de tracer des graphiques. Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `matplotlib.pyplot` a préalablement été importée à l'aide de la commande :

```
import matplotlib.pyplot as plt.
```

- Description : fonction permettant de tracer un graphique de n points dont les abscisses sont contenues dans le vecteur x et les ordonnées dans le vecteur y . Cette fonction doit être suivie de la fonction `plt.show()` pour que le graphique soit affiché.
- Argument d'entrée : un vecteur d'abscisses x (tableau de n éléments) et un vecteur d'ordonnées y (tableau de n éléments). La chaîne de caractères 'SC' précise le style et la couleur de la courbe tracée. Des valeurs possibles pour ces deux critères sont :

Valeurs possibles pour S (style) :

Description	Ligne continue	Ligne traitillée	Marqueur rond	Marqueur plus
Symbole S	-	--	o	+

Valeurs possibles pour C (couleur) :

Description	bleu	rouge	vert	noir
Symbole C	b	r	g	k

- Argument de sortie : un graphique.

```
x = np.linspace(3, 25, 5)
y = np.sin(x)
plt.plot(x,y,'-b') # tracé d'une ligne bleue continue
plt.title('titre_graphique') # titre du graphe
plt.xlabel('x') # titre de l'axe des abscisses
plt.ylabel('y') # titre de l'axe des ordonnées
plt.show()
```

- np.array(liste) :

- Description : crée une matrice (de type tableau) à partir d'une liste.
- Argument d'entrée : une liste définissant un tableau à 1 dimension (vecteur) ou 2 dimensions (matrice).
- Argument de sortie : un tableau (matrice).

Commande	Résultat
<code>np.array([4, 3, 5])</code>	<code>[4, 3, 5]</code>

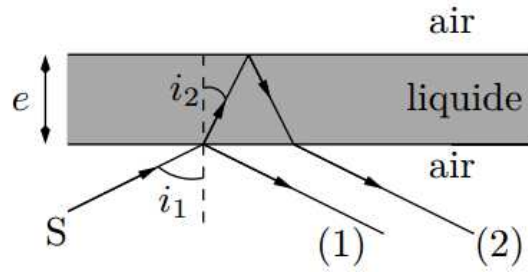
Exemple: $T1 = np.array([2, 6, 8])$ et $T2 = np.array([1, 7, 9])$

Les indices démarrent à 0 donc $T1[1] = 6$ et $T2[2] = 9$
 $np.cross(T1, T2)$ réalise le produit vectoriel des vecteurs associés à $T1$ et $T2$.

I. Mesure de l'épaisseur d'une bulle de savon

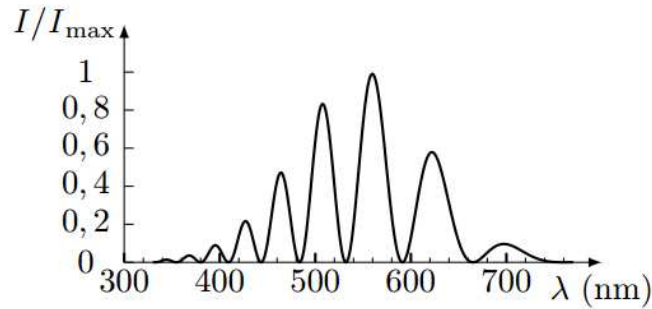
On cherche à mesurer l'épaisseur d'un film de savon par une méthode interférométrique.

Une source de lumière S ponctuelle et monochromatique, de longueur d'onde λ , éclaire le film liquide d'épaisseur e supposée constante et uniforme. On s'intéresse aux interférences entre les rayons (1) et (2) tracés sur la figure suivante. Le film liquide est assimilé à un milieu d'indice optique n et l'air est assimilé au vide.



1. Montrer que les rayons (1) et (2) sont parallèles.
2. Montrer que la différence de marche $\delta_{2/1}(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = 2ne \cos i_2$ pour un point M à l'infini. Donnée: $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$.
3. Exprimer l'ordre d'interférences en M . Comment évolue l'ordre d'interférences lorsque la longueur d'onde augmente?

En pratique, on utilise une source polychromatique couvrant le domaine visible et on éclaire le film sous incidence normale. Un spectromètre placé au bout d'une fibre optique dans la direction commune des rayons (1) et (2) permet de relever des longueurs d'onde éteintes, correspondant à des interférences destructives entre les deux rayons. On donne la courbe représentant l'intensité en M à l'infini en fonction de la longueur d'onde lorsque le film de savon est éclairé en incidence normale.

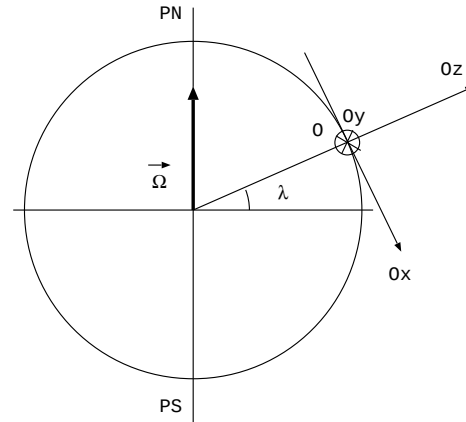


4. Lire sur la courbe les valeurs numériques de deux longueurs d'onde de votre choix, λ_1 et λ_2 , voisines et éteintes avec $\lambda_2 > \lambda_1$. Exprimer les ordres d'interférences p_1 et p_2 associés à ces deux longueurs d'onde. Que dire de p_1 ? de p_2 ? Donner la valeur numérique de $p_1 - p_2$ et en déduire la valeur numérique de e pour $n = 1,33$.

II. Effets de la rotation de la Terre

Le référentiel géocentrique noté $\mathcal{R}_g$, dont l'origine est le barycentre de la Terre et dont les axes sont dirigés selon trois étoiles fixes lointaines est supposé galiléen. La Terre est assimilée à une sphère de centre T , de masse M_T et de rayon R_T . Le référentiel terrestre noté $\mathcal{R}_T$, a pour origine T et ses axes sont liés à la Terre. On note $\vec{\Omega}$, la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ dirigée selon l'axe des pôles.

En un point O à la surface du sol et à la latitude λ , on utilise la base de projection $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ représentée ci-contre où Ox est la direction tangente à un méridien vers le sud, Oy est tangente à un parallèle vers l'est et Oz est la verticale ascendante.

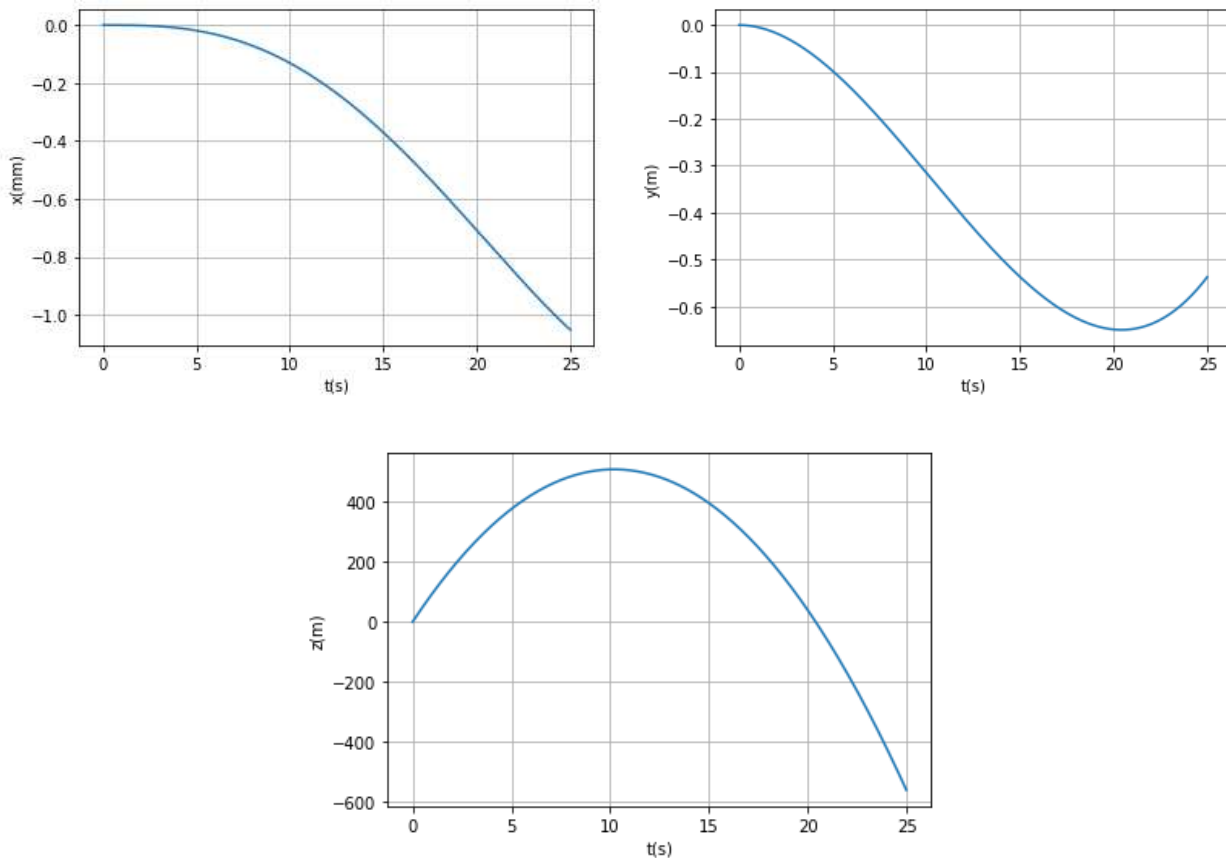


Données: $R_T = 6\,360\text{ km}$: rayon de la Terre, $g_0 = 9,81\text{ m.s}^{-2}$: champ de gravitation terrestre au sol

1. Calculer la valeur numérique de Ω et exprimer $\vec{\Omega}$ sur les vecteurs de base $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$.
2. Le référentiel terrestre est-il galiléen? Écrire les forces d'inertie subies par un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre.
3. Définir le poids d'un corps et représenter sur votre copie sur trois schémas différents, le poids en O de latitude λ , en N au pôle nord et en E à l'équateur.
Exprimer en fonction des données, la grandeur $\Delta g = \|\vec{g}(N)\| - \|\vec{g}(E)\|$ où $\vec{g}(N)$ représente le champ de pesanteur en N et $\vec{g}(E)$ représente le champ de pesanteur en E . Faire l'application numérique et conclure.

On étudie le tir d'un obus assimilé à un point matériel M de masse m depuis le point O sur la Terre, à la latitude λ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$. On néglige tout frottement exercé sur l'obus. On étudie le mouvement de M dans le référentiel terrestre et dans la base de projection $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

4. Dans l'hypothèse où le référentiel terrestre est galiléen, exprimer la vitesse de M dans le référentiel terrestre en fonction du temps et la durée τ de la chute libre dans cette expérience, et préciser le point où tombe la masse.
5. On tient compte ici du fait que le référentiel terrestre n'est pas galiléen et on évalue la force de Coriolis en utilisant l'expression de la vitesse obtenue dans la question précédente. En déduire les équations horaires du mouvement $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ et les coordonnées du point d'impact I sur le sol. Préciser dans quelle direction est dévié M . Faire l'application numérique des coordonnées x_I et y_I du point d'impact sur le sol pour $\lambda = 50^\circ$ et $v_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$.
6. On donne les courbes $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ (attention aux unités) obtenues par simulation sous python de la trajectoire de l'obus.



Déduire de ces courbes, en justifiant vos réponses:

- la hauteur maximale atteinte par l'obus
- la valeur numérique approchée de sa vitesse initiale v_0 et la direction de $\vec{v}_0$
- les coordonnées du point d'impact de l'obus lorsqu'il retombe sur le sol en précisant s'il a été dévié du point O , vers le sud, vers le nord, vers l'est ou vers l'ouest
- Vérifier la cohérence avec les résultats de la question précédente.

7. On donne le code qui a permis de réaliser ses simulations:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 Omega,lat=[instruction 1]
5 g0,v0=9.8,100
6 tau=0.01
7 N=2500
8 Vecg=np.array(instruction 2)
9 Vecomega=np.array(instruction 3)
10 VecV=np.array([0,0,v0])
11 VecPos=np.array([0,0,0])
12 lt,l1,l2,l3=[0],[VecPos[0]],[VecPos[1]],[VecPos[2]]
13 for i in range(N-1):
14     lt.append(instruction 4)
15     Vec1=Vecg-2*np.cross(Vecomega,VecV)
16     VecV=VecV+tau*Vec1
17     VecPos=VecPos+tau*VecV
18     l1.append(VecPos[0])
19     l2.append(VecPos[1])
20     l3.append(VecPos[2])
```

7.a. Dans ce code, Omega et lat désignent respectivement la vitesse angulaire de la Terre et la latitude du lieu en radian. Ecrire l'instruction 1.

7.b. On désigne par Vecomega, Vecg, VecPos et VecV, respectivement les vecteurs $\vec{\Omega}$, $\vec{g}_0$, $\vec{OM}(t)$ et $\vec{v}(t)$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Lignes 10 et 11 correspondent aux conditions initiales, $\vec{OM}(t=0)$ et $\vec{v}(t=0)$. Que représentent l1, l2 et l3 ligne 12? Ecrire les instructions 2 et 3.

7.c. La résolution utilise la méthode d'Euler. Le temps est discrétisé et on note tau le pas de temps. Ecrire l'instruction 4.

7.d. Pour tau petit, exprimer $\vec{v}(t+tau)$ en fonction de $\vec{v}(t)$, tau et $\vec{a}(t)$. De même exprimer $\vec{OM}(t+tau)$ en fonction de $\vec{OM}(t)$, tau et $\vec{v}(t)$.

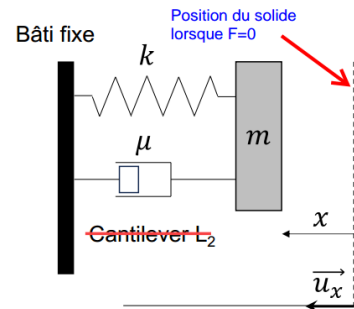
7.e. Que représente Vec1 ligne 15? Donner les numéros des lignes où les développements limités précédents sont utilisés.

7.f. Ecrire sur votre copie le code qui permet de tracer la courbe $y(t)$ obtenue.

III. Régime sinusoïdal forcé

On étudie un solide de masse m en translation selon $\vec{u}_x$, x est ici l'écart à la position d'équilibre du solide (lorsque $\vec{F} = \vec{0}$), et $\vec{v}$ est sa vitesse.

Le solide subit une force de rappel de constante de raideur k , de la forme $\vec{F}_r = -kx\vec{u}_x$, une force de dissipation visqueuse de coefficient μ , de la forme $\vec{f} = -\mu\vec{v}$ et une force excitatrice $\vec{F} = F(t)\vec{u}_x = F_1 \cos(\omega t)\vec{u}_x$.



On étudie le mouvement sinusoïdal du solide à la pulsation ω . En régime permanent, toutes les grandeurs mécaniques sont donc sinusoïdales et de même pulsation, en particulier, $x(t) = x_1 \cos(\omega t + \phi)$.

1. On note j le complexe tel que $j^2 = -1$. Écrire les signaux complexes $\underline{F}(t)$ et $\underline{x}(t)$. On introduira les amplitudes complexes $\underline{F}_1$ et $\underline{x}_1$, dont on précisera les expressions en fonction de F_1 , x_1 et ϕ .

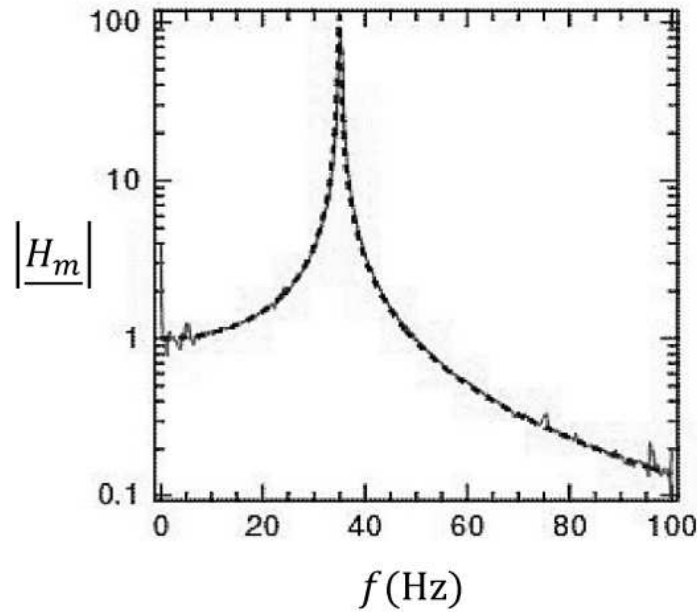
2. On définit la fonction de transfert mécanique par $\underline{H}_m = \frac{kx_1}{\underline{F}_1}$. Montrer que la fonction de transfert peut

se mettre sous la forme $\underline{H}_m = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ où la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q seront exprimés en fonction de m , k et μ . Préciser la signification physique de ω_0 et Q .

3. Déterminer le module de la fonction de transfert $|\underline{H}_m|$ en fonction de $\xi = \frac{\omega}{\omega_0}$.

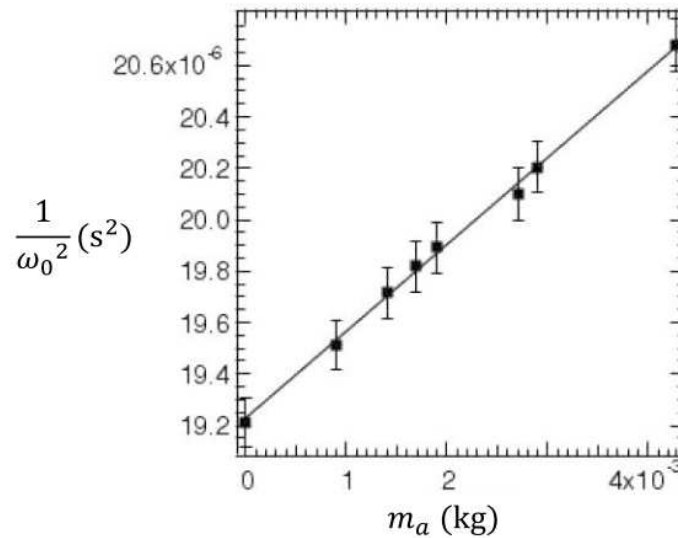
4. Montrer que pour une condition sur Q que l'on précisera, $|\underline{H}_m|$ présente une résonance à une pulsation ω_r dépendant de ω_0 et de Q . À quelle condition sur Q peut-on considérer que $\omega_r \approx \omega_0$?

Pour déterminer ω_0 et Q , on réalise une étude en fréquence. On donne le module de la fonction de transfert $|\underline{H}_m|$ en fonction de la fréquence.



5. Déterminer les valeurs numériques de ω_0 et de Q à partir du graphe.

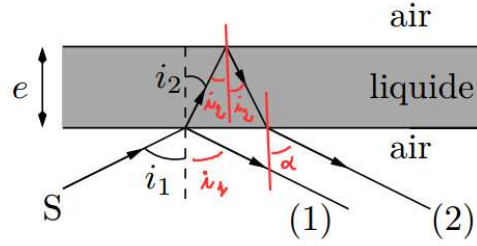
Pour déduire la force $\vec{F}$ de la fonction de transfert $\underline{H}_m$, il faut mesurer la constante de raideur k du système, puisque $\underline{F}_1 = \frac{kx_1}{\underline{H}_m}$. Pour ce faire, on met en oeuvre la méthode de Cleveland, qui consiste à lester le porte-plan avec des masses m_a croissantes. La masse du système est alors $m + m_a$, ce qui modifie la pulsation propre ω_0 . Par le même protocole que précédemment, on détermine ω_0 pour plusieurs valeurs de m_a . Les résultats sont rassemblés sur le graphe suivant.



6. Déterminer la valeur de la constante de raideur k à partir du graphe. Quelle autre grandeur pourrait être déduite de ce graphe ?

IV. Correction: mesure de l'épaisseur d'un film de savon

1. On applique les lois de Descartes sur le premier dioptre: $\sin i_1 = n \sin i_2$ et sur le second dioptre: $n \sin i_2 = \sin \alpha$ donc $\alpha = i_1$.

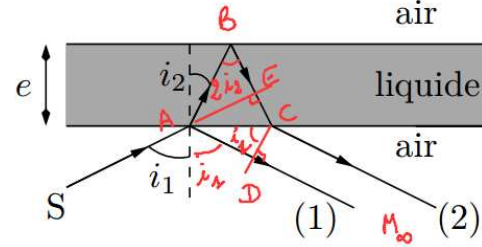


2. Par principe de retour inverse de la lumière, M se comporte comme une source et entre la source M et la surface d'onde AE le chemin optique est constant soit $(AM) = (EM)$.

On a donc $\delta_{2/1}(M) = (SA) + (AB) + (BE) + (EM) - (SA) - (AM) = nAB + nBE$

avec $AB = \frac{e}{\cos i_2}$ et $BE = AB \cos(2i_2)$

Soit $\delta_{2/1}(M) = n \frac{e}{\cos i_2} (1 + \cos(2i_2)) = 2en \cos i_2$.



Remarque: on peut aussi utiliser la surface d'onde DC avec $(CM) = (DM)$.

3. L'ordre d'interférence en M est $p(M) = \frac{\delta_{2/1}(M)}{\lambda} = \frac{2ne \cos i_2}{\lambda}$. Quand λ augmente l'ordre d'interférences p diminue.

4. Sous incidence normale on a $i_2 = 0$ soit $p_1 = \frac{2ne}{\lambda_1}$ et $p_2 = \frac{2ne}{\lambda_2}$. Les longueurs d'onde éteintes correspondent à des interférences destructives donc à des ordres d'interférence demi entier. Ainsi on sait que p_1 est un demi entier, p_2 est un demi entier et entre deux franges voisines, l'ordre varie de 1 on a donc $p_1 - p_2 = +1$ ($p_1 > p_2$ car $\lambda_1 < \lambda_2$).

Je choisis par exemple $\lambda_1 = 480 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 530 \text{ nm}$ (pour des interférences destructives, l'intensité est minimale, ici ce minimum est nul).

On a donc $p_1 - p_2 = 1 = 2ne(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})$ donc $e = \frac{1}{2n(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2})} = 1,9 \text{ } \mu\text{m}$.

V. Correction: effets de la rotation de la Terre

1. On $\vec{\Omega} = \Omega(-\cos \lambda \vec{e}_x + \sin \lambda \vec{e}_z)$ et $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24.3600} = 7,3.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

2. Le référentiel terrestre est en rotation dans le référentiel géocentrique, il n'est pas en translation rectiligne uniforme dans R_g donc il n'est pas galiléen.

Un point M subit la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 \overline{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles et la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_t}$.

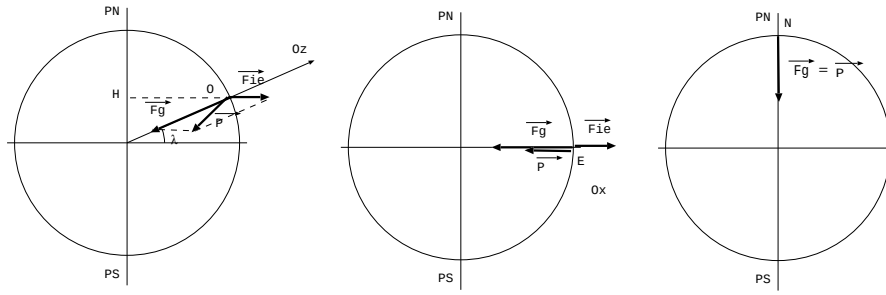
3. On définit le poids d'un corps comme la somme de la force d'attraction gravitationnelle de la Terre (dirigée vers le centre de la Terre) et de la force d'inertie d'entraînement.

Soit en un point sur le sol $\vec{P} = -\vec{F}_g + m\Omega^2 \overline{HM}$.

Pour M à l'équateur: $\overline{HM} = R_T \vec{e}_z$ soit $\vec{g}(E) = (-g_0 + \Omega^2 R_T) \vec{e}_z$

Pour M sur les pôles, la force d'inertie d'entraînement est nulle soit $\vec{P}(N) = -g_0 \vec{e}_z$

Ainsi $\Delta g = \|\vec{g}(N)\| - \|\vec{g}(E)\| = g_0 - (g_0 - \Omega^2 R_T) = \Omega^2 R_T = 0,03 \text{ m.s}^{-2}$.



On conclut que l'on pourra écrire dans la suite que le poids est confondu avec l'attraction de la Terre, soit on peut négliger la force d'inertie d'entraînement et $\vec{P} = m\vec{g}_0$.

4. On suppose le référentiel terrestre galiléen. M subit uniquement son poids $\vec{P} = m\vec{g}_0 = -mg_0\vec{e}_z$. Le PFD s'écrit: $m\vec{a} = \vec{P}$.

On projette sur Oz : $\ddot{z} = -g_0$ soit $\dot{z} = -g_0t + v_0$ et $z(t) = -g_0\frac{t^2}{2} + v_0t$.

M a un mouvement rectiligne selon Oz , il tombe en O à l'instant t_f tel que $z(t_f) = 0 = -g_0\frac{t_f^2}{2} + v_0t_f = t_f(-g_0\frac{t_f}{2} + v_0)$ soit $t_f = 0$: c'est l'instant de départ et $t_f = \frac{2v_0}{g_0}$: c'est l'instant d'arrivée.

5. Le référentiel terrestre n'est pas galiléen. Dans ce référentiel M subit son poids $\vec{P} = -mg_0\vec{e}_z$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_t} = -2m\Omega(-\cos\lambda\vec{e}_x + \sin\lambda\vec{e}_z)\Lambda(-g_0t + v_0)\vec{e}_z = -2m\Omega\cos\lambda(v_0 - g_0t)\vec{e}_y$.

On écrit le PFD: $m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_t} = \vec{P} + \vec{F}_{ic}$

En projection sur Ox : $m\ddot{x} = 0$

En projection sur Oy : $m\ddot{y} = -2m\Omega\cos\lambda(v_0 - g_0t)$

En projection sur Oz : $m\ddot{z} = -mg_0$

On primitive $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$ deux fois par rapport au temps pour trouver les équations horaires du mouvement (il n'y a pas de mouvement selon Ox):

$$\dot{z} = -g_0t + v_0 \text{ et } z = -g_0\frac{t^2}{2} + v_0t$$

$$\dot{y} = -2\Omega\cos\lambda(v_0t - g_0\frac{t^2}{2}) \text{ et } y = -2\Omega\cos\lambda(v_0t^2 - g_0\frac{t^3}{6}).$$

M touche le sol pour $z(t_f) = 0$ soit comme précédemment $t_f = \frac{2v_0}{g_0}$ donc $y_I = y(t_f) = -2\Omega\cos\lambda(v_02v_0^2g_0^2 - \frac{4v_0^3}{3g_0^2}) = -\Omega\cos\lambda\frac{4v_0^3}{3g_0^2} < 0$: M est dévié vers l'ouest.

AN: $x_I = 0$ et $y_I = -0,65 \text{ m}$

6. L'altitude maximale est voisine de 500 m.

La vitesse initiale selon Ox , Oy est Oz est donnée par la pente de la tangente à la courbe en $t = 0$. Sur $x(t)$ et $y(t)$, la tangente est horizontale donc $\dot{x}(t = 0) = \dot{y}(t = 0) = 0$.

On trace la tangente à la courbe $z(t)$ et je calcule la pente de la droite en utilisant deux points sur la droite:

$$\dot{z}(t = 0) = \frac{500 - 0}{5 - 0} = 100 \text{ m.s}^{-1}.$$

Le point atteint le sol soit $z = 0$ pour $t = 21 \text{ s}$. A cet instant on a $x = -0,75 \text{ mm} < 0$: déviation vers le nord et $y = -0,65 \text{ m} < 0$: déviation vers l'ouest.

C'est en accord avec les résultats précédents pour v_0 et y_I . Dans la question précédente, on n'a pas trouvé de déviation vers le nord car on a approximé la vitesse selon Oz .

7. 7.a. instruction 1: `omega=2*np.pi/24/3600`

`lat=50*2*np.pi/180`

7.b. `l1=VecPos[0], l2=VecPos[1], l3=VecPos[2]` représentent $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

instruction 2: `[0, 0, g0]`

instruction 3: `[-omega * np.cos(lat), 0, omega * np.sin(lat)]`

7.c. instruction 4: `lt[i]+tau`

7.d. $\vec{v}(t + \tau) = \vec{v}(t) + \tau \vec{a}(t)$ et $\overrightarrow{OM}(t + \tau) = \overrightarrow{OM}(t) + \tau \vec{v}(t)$.

7.e. Vec1 représente le vecteur accélération $\vec{a} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$. Les développements limités précédents sont utilisés lignes 16 et 17.

7.f. `plt.plot(lt,l2)` `plt.ylabel('y(m)')`
`plt.grid()` `plt.show()`
`plt.xlabel('t(s)')`

VI. Régime sinusoïdal forcé

1. En notation complexe, les cos deviennent e^j soit:

$$\underline{F}(t) = F_1 e^{j(\omega t + \psi)} = F_1 e^{j\psi} e^{j\omega t}, \text{ on note } \underline{F}_1 = F_1 e^{j\psi}.$$

$$\underline{x}(t) = x_1 e^{j(\omega t + \phi)} = x_1 e^{j\phi} e^{j\omega t}, \text{ on note } \underline{x}_1 = x_1 e^{j\phi}.$$

2. On applique le PFD à la masse m qui dans le référentiel d'étude galiléen, subit les forces: $\vec{F}$, $\vec{F}_r$ et $\vec{f}_v$ soit:

$$m \vec{a} = m \ddot{\underline{x}} = F(t) \underline{u}_x - kx \underline{u}_x - \mu \dot{x} \underline{u}_x$$

En projetant sur Ox et en passant en notation complexe on a :

$$m(-\omega^2 \underline{x}(t)) = \underline{F}(t) - k \underline{x}(t) - \mu j \omega \underline{x}(t)$$

En divisant par $e^{j\omega t}$, $\underline{F}(t)$ devient $\underline{F}_1$ et $\underline{x}(t)$ devient $\underline{x}_1$ soit:

$$m(-\omega^2 \underline{x}_1) = \underline{F}_1 - k \underline{x}_1 - \mu j \omega \underline{x}_1$$

$$\text{donc } \underline{x}_1 = \frac{\underline{F}_1}{k - m\omega^2 + j\mu\omega}.$$

$$\text{On en déduit donc la fonction de transfert: } \underline{H}_m = \frac{k \underline{x}_1}{\underline{F}_1} = \frac{k}{k - m\omega^2 + j\mu\omega} = \frac{1}{1 - \frac{m\omega^2}{k} + j \frac{\mu\omega}{k}}.$$

En identifiant avec l'énoncé il vient: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation propre de l'oscillateur et $Q\omega_0 = \frac{k}{\mu}$ donc $Q = \frac{1}{\mu} \sqrt{km}$: facteur de qualité de l'oscillateur d'autant plus grand que les frottements sont faibles.

3. On prend le module soit $|\underline{H}_m| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$.

4. La résonance correspond à un maximum d'amplitude. Ici le numérateur est constant donc la fraction $|\underline{H}_m| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$ est maximale lorsque le dénominateur est minimale. On cherche donc le minimum

du dénominateur. On pose $f(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ et on cherche x tel que $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 2(-2x)(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 4x(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}) = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et pour } x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}: \text{ cette solution existe}$$

$$\text{pour } 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \text{ soit pour } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ On a donc à résonance } x_r = \frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ soit } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

On a $\omega_r \approx \omega_0$ pour Q grand, soit lorsqu'il y a peu de frottements.

5. A résonance on lit $f_r = 35 \text{ Hz}$ et $|\underline{H}_m| = 100$.

On a donc $\omega_r = 2\pi f_r \approx 200 \text{ rad/s}$ et $|\underline{H}_m| = 100 = |\underline{H}_m(x_r \approx 1)| = Q$.

6. On a trouvé que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m}{k}$ ou plutôt ici comme les masses sont modifiées $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m + m_a}{k}$.

On trace $\frac{1}{\omega_0^2}$ en fonction de m_a : c'est une droite de pente $\frac{1}{k}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{m}{k}$.

On calcule donc la pente de la droite pour trouver k : $\frac{1}{k} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Je lis de façon approchée les couples de points $(x_1 = 1.10^{-3}; y_1 = 19,6.10^{-4})$ et $(x_2 = 4.10^{-3}, y_2 = 20,6.10^{-4})$. On a donc $\frac{1}{k} = \frac{(20,6 - 19,6).10^{-4}}{(4 - 1).10^{-3}} = \frac{1}{3}10^{-1} = 3,3.10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$. On peut déduire m de l'ordonnée à l'origine.