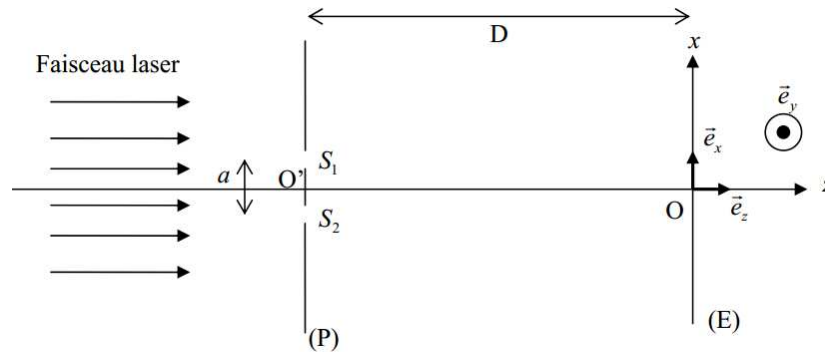


DM 3 de physique

On réalise, dans l'air, l'expérience des trous d'Young à l'aide du dispositif décrit et schématisé ci-dessous.

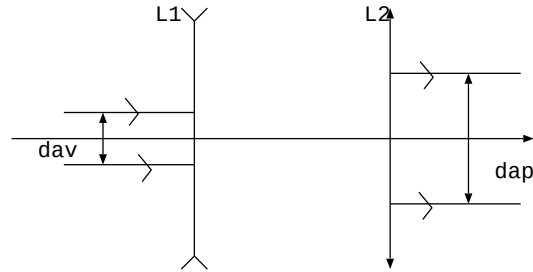


Un laser, de longueur d'onde dans le vide λ , émet un faisceau lumineux cylindrique d'axe Oz . On suppose par la suite, sauf mention contraire dans la question 1/, que le faisceau du laser éclaire entièrement et de manière uniforme les différentes ouvertures qui sont placées sur son passage. Une plaque opaque (P), percée de deux trous circulaires de centres S_1 et S_2 de même taille et de faibles dimensions, est placée perpendiculairement à l'axe Oz .

On note O' le milieu du segment S_1S_2 et a la distance entre les centres des deux trous S_1 et S_2 . Le phénomène d'interférences est observé sur un écran (E) placé perpendiculairement à l'axe Oz . La distance entre la plaque (P) et l'écran (E) est égale à D . On a ainsi $O'O = D$.

Dans tout le problème, l'indice de réfraction de l'air sera pris égal à 1.

1. Nous nous plaçons, uniquement pour cette question, dans le cas où le laser dont nous disposons ne permet pas d'éclairer simultanément les deux trous de la plaque (P): le diamètre du faisceau laser est inférieur à la distance a . Nous souhaitons réaliser un dispositif permettant d'élargir le faisceau laser. Pour cela nous disposons de deux lentilles: une lentille divergente L_1 et une lentille convergente L_2 de distances focales respectives f'_1 et f'_2 , telles que $|f'_1| < f'_2$. On note d_{av} et d_{ap} les diamètres respectifs du faisceau laser avant et après son élargissement.



Reproduire le schéma du montage et compléter le trajet des rayons. Calculer le rapport $\frac{d_{ap}}{d_{av}}$ en fonction de f'_1 et f'_2 .

2. Quelle est la couleur émise par le laser dans le cas d'un laser He-Ne de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 632,8 \text{ nm}$? Quelles sont les longueurs d'onde et les couleurs respectives qui correspondent aux limites du spectre de la lumière visible?

3. Existence d'un champ d'interférences

3.a. En se référant uniquement aux lois de l'optique géométrique, quelle devrait être l'allure de la figure observée sur l'écran (E)? Pour quelle raison l'optique géométrique ne permet-elle pas de prévoir l'existence d'un champ d'interférences dans le cas du dispositif des trous d'Young? A quel phénomène physique doit-on faire appel pour en comprendre l'existence?

3.b. Réaliser un schéma représentant le champ d'interférences. Préciser sa forme et exprimer sa taille. On note R le rayon d'un trou. Donnée: la demi largeur angulaire de la tache centrale de diffraction pour un trou de rayon R est $\theta_{1/2} = \frac{1,22\lambda}{2R}$.

4. Description de la figure d'interférences

Les réponses aux questions suivantes seront justifiées. Une démonstration quantitative ne sera toutefois pas exigée.

- 4.a. Qu'observe-t-on sur l'écran (E)? Décrire précisément la figure d'interférences obtenue.
- 4.b. Qu'observe-t-on sur l'écran (E) si l'on obture l'un des deux trous?
- 4.c. Comment est modifiée la figure d'interférences si on translate la plaque (P) suivant l'axe Ox suivant l'axe Oy ?
- 4.d. Comment est modifiée la figure d'interférences si on translate l'écran (E) suivant l'axe Oz ?

5. Différence de chemin optique

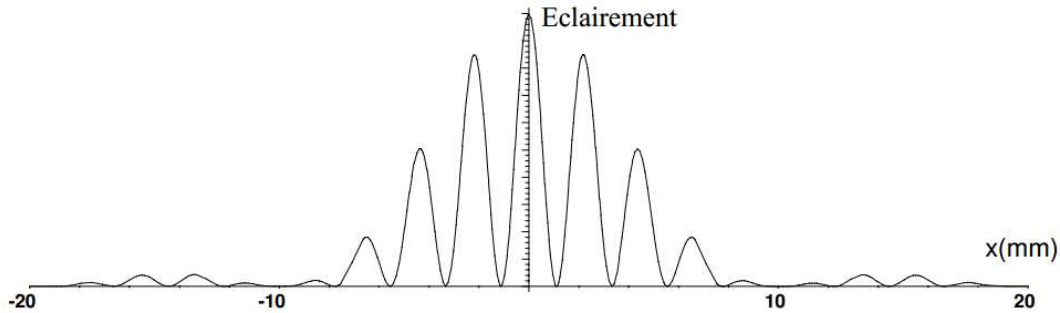
Soit un point M de l'écran (E), de coordonnées $(x, y, 0)$ dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

5.a. Exprimer les coordonnées des trous S_1 et S_2 , et la différence de chemin optique $\delta(M) = S_2M - S_1M$ sans aucune approximation, en fonction de a , D , x et y .

5.b. La distance a entre les deux trous étant petite par rapport à la distance d'observation D , et le point M étant proche du point O , on peut considérer que a , x , y sont très petits devant D . En faisant un développement limité au premier ordre de l'expression de $\delta(M)$ obtenue précédemment, en déduire l'expression simplifiée de $\delta(M)$ en fonction de a , D et x .

5.c. Déduire de l'expression de la différence de marche la forme des franges et l'expression de l'interfrange.

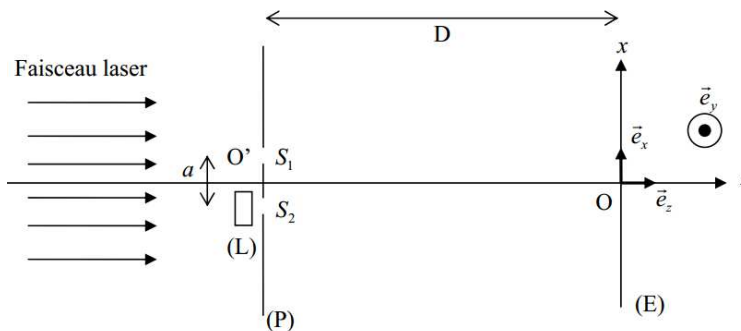
6. On donne l'intensité sur l'écran en fonction de x . Déduire de cette courbe les valeurs numériques de R et de a . Données: $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ et $D = 1,0 \text{ m}$.



Nous nous plaçons encore pour cette partie dans le cas où la distance a entre les deux trous étant petite par rapport à la distance d'observation D , et le point M étant proche du point O , on peut considérer que a , x , y sont très petits devant D .

7. Interposition d'une lame à faces parallèles

Dans cette question uniquement, on rajoute devant le trou S_2 une petite lame (L) (verre ou mica) à faces parallèles, d'épaisseur e et d'indice n pour la longueur d'onde λ utilisée. Le faisceau laser arrive toujours perpendiculairement à la plaque (P) et traverse la lame (L) sous incidence normale.

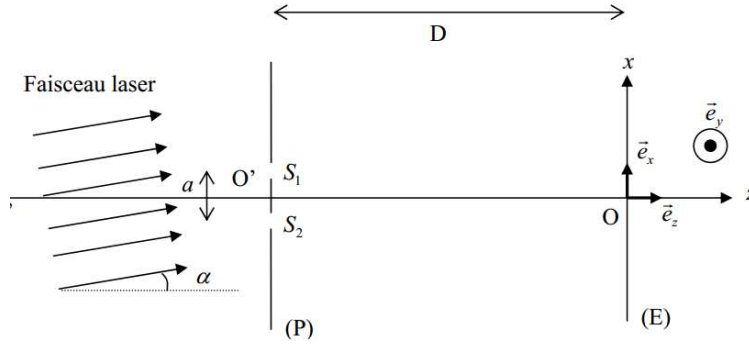


Prévoir sans calcul le sens dans lequel se déplace la figure d'interférences par rapport au cas de la question précédente? Calculer la différence de chemin optique $\delta'(M)$ au point M entre les rayons issus de S_1 et S_2 en fonction de n , e , a , x et D . En déduire, en utilisant les résultats de la partie précédente, de quelle distance

d la figure d'interférences sera translatée. On exprimera d en fonction de n , e , a et D . Calculer d pour $a = 300 \mu m$, $\lambda = 632,8 nm$, $D = 1,0 m$, $n = 1,6$ et $e = 7,5 \mu m$.

8. Inclinaison du faisceau laser

Les rayons du faisceau laser ne sont plus parallèles à l'axe Oz . Ils sont inclinés d'un angle D par rapport à cet axe. On se placera dans le cas où l'angle α est petit.



Comment est modifiée la figure d'interférences? Quelle est dans ce cas la position de la frange d'ordre 0?

9. Pour mesurer l'écartement a des trous, on propose de faire l'image agrandie des trous par une lentille convergente de distance focale image $f' = 20,0 cm$, on réalise l'image des trous de Young sur un écran placé à une distance $L = 2,0 m$ des trous et A' son image réelle sur l'écran. On a donc $AA' = L$ et on note $x = AO > 0$ (la distance AO).

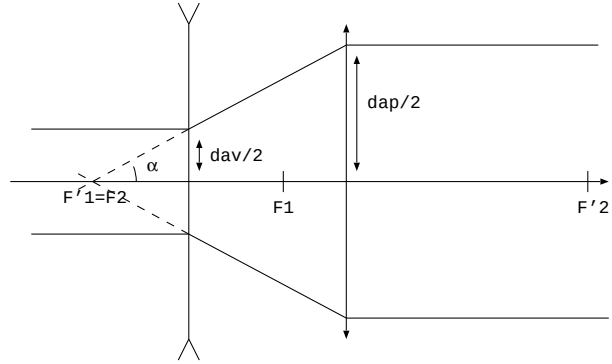
9.a. Déterminer l'équation vérifiée par x pour que l'image se forme sur l'écran. Montrer que cette équation admet deux solutions que l'on exprimera en fonction de L et f' .

9.b. Garder la solution x qui correspond au grandissement le plus grand en valeur absolue et exprimer ce grandissement γ en fonction de L et f' . Faire l'application numérique.

9.c. L'écartement a' des trous images sur l'écran vaut $a' = 2,3 mm$. En déduire a .

I. Correction

1. Les rayons incidents sont parallèles à l'axe optique, ils se croisent au foyer image de L_1 . Les rayons sortants sont parallèles à l'axe optique, ils sont passés par F_2 avant de traverser L_2 . On a donc $F'_1 = F_2$. On a $\tan \alpha = \frac{d_{av}/2}{-f'_1} = \frac{d_{ap}/2}{f'_2}$ soit $\frac{d_{ap}}{d_{av}} = \frac{-f'_1}{f'_2}$.

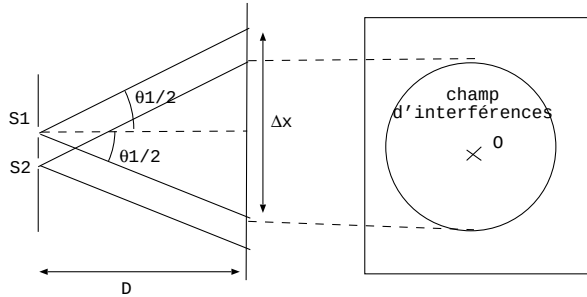


2. Le laser de longueur d'onde $632,8 \text{ nm}$ émet la couleur rouge. Les limites du spectre visible sont $\lambda = 400 \text{ nm}$ pour le bleu et $\lambda = 800 \text{ nm}$ pour le rouge.

3.

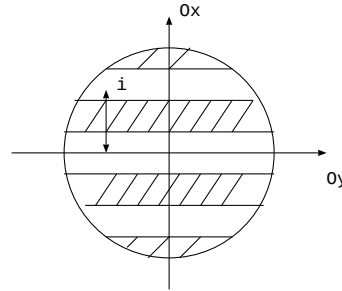
3.a. D'après les lois de l'optique géométrique, *les rayons se propagent en ligne droite dans un milieu homogène*, donc sur l'écran on devrait observer deux points lumineux correspondants aux rayons passés par les trous S_1 et S_2 . Cependant dans cette expérience, les lois de l'optique géométrique ne s'appliquent pas, on doit tenir compte de la nature ondulatoire de la lumière car *les distances sont de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde* (a de l'ordre de λ). Ainsi la lumière, à la traversée des trous, subit de la diffraction. Chaque trou donne une tache centrale de *diffraction* à l'écran, circulaire et très lumineuse et les taches, en se superposant, permettent d'observer des interférences

3.b. Les taches centrales de diffraction se superposent car la distance a est très faible. Le champ d'interférences a pour largeur, la largeur de la *tache centrale de diffraction*, d'autant plus grande que les trous sont petits. Le champ d'interférences est un disque de diamètre Δx tel que $\tan \theta_{1/2} = \frac{\Delta x}{2D} \approx \theta_{1/2}$ donc on a $\Delta x = 2D\theta_{1/2} = \frac{1,22\lambda D}{R}$.



4.

4.a. On observe des franges rectilignes perpendiculaires à la direction S_1S_2 soit ici des franges horizontales selon Oy . La frange centrale est en O , elle est brillante. Ces franges sont dans le champ d'interférences qui a la forme d'un disque.



4.b. Si l'on obture l'un des deux trous, on ne voit plus de franges d'interférences, on ne voit que la figure de diffraction à travers un trou: un disque centré sur O très lumineux, entouré de franges circulaires très peu lumineuses. Le disque est d'autant plus grand que le trou est petit.

4.c. Si l'on translate les trous, cela ne fait que translater dans le même sens et la même direction la figure d'interférences.

4.d. La largeur de la tache centrale de diffraction et l'interfrange sont proportionnels à la distance entre les trous et l'écran, on voit donc le même nombre de franges mais tout est plus grand si l'on augmente D .

5.

5.a. S_1 et S_2 ont respectivement pour coordonnées $(+\frac{a}{2}, 0, -D)$ et $(-\frac{a}{2}, 0, -D)$. On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{S_1M} = (x - \frac{a}{2})\vec{e}_x + y\vec{e}_y - D\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{S_2M} = (x + \frac{a}{2})\vec{e}_x + y\vec{e}_y - D\vec{e}_z$ d'où les distances cherchées:

$$S_1M = \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2} \text{ et } S_2M = \sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2}.$$

On en déduit la différence de marche $\delta(M) = \sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2}$.

$$\text{5.b. On a } \delta(M) = D[(1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{(x + \frac{a}{2})^2}{D^2})^{1/2} - (1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{D^2})^{1/2}]$$

$$\delta(M) = D[(1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{(x + \frac{a}{2})^2}{2D^2}) - (1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{2D^2})]$$

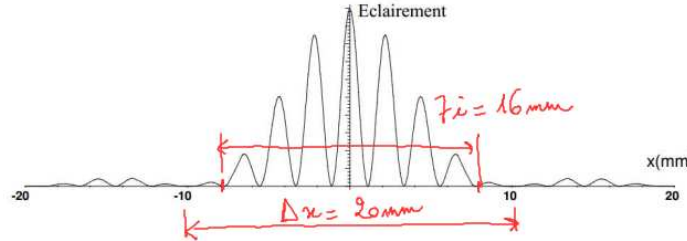
$$\delta(M) = D[\frac{(x + \frac{a}{2})^2}{2D^2} - \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{2D^2}]$$

$$\delta(M) = \frac{ax}{D}.$$

5.c. Les points qui sont sur une même frange ont le même ordre d'interférences soit la même différence de marche. Or la différence de marche ne dépend que de x donc les points sur une même frange sont sur la droite d'équation $x = \text{constante}$, ces droites sont horizontales.

L'interfrange est la distance entre les milieux de deux franges brillantes (ou sombres) consécutives. Les franges brillantes correspondent à des ordres d'interférences entiers. On note x_k la position des franges brillantes à l'écran. On a $p = \frac{ax_k}{\lambda D} = k$ un entier relatif soit $x_k = \frac{k\lambda D}{a}$ et $i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda D}{a}$.

6.



On lit sur la courbe donnée qu'entre $x = -8 \text{ mm}$ et $x = +8 \text{ mm}$, il y a 7 interfranges soit $i = \frac{16}{7} = 2,3 \text{ mm}$ avec $i = \frac{\lambda D}{a}$. On en déduit la distance entre deux trous soit $a = \frac{\lambda D}{i} = \frac{632,8 \cdot 10^{-9} \cdot 1,0}{2,3 \cdot 10^{-3}} = 274 \mu\text{m}$.

On observe également que l'intensité s'annule pour $x = \pm 10 \text{ mm}$, ce sont les limites de la tache centrale de diffraction: limites du champ d'interférences soit $\Delta x = 20 \text{ mm}$. En prenant les résultats de la question 3b, on a $\Delta x = \frac{1,22\lambda D}{R}$. On en déduit le rayon R d'un trou par $R = \frac{1,22\lambda D}{\Delta x} = \frac{1,22 \cdot 632,8 \cdot 10^{-9} \cdot 1,0}{20 \cdot 10^{-3}} = 39 \mu\text{m}$.

7. La figure d'interférences est inchangée, elle est juste translatée. Le chemin optique devant S_2 augmente donc pour compenser, la nouvelle frange centrale se trouve en dessous de O pour que le chemin optique derrière S_2 soit plus court. Les franges descendent.

La différence de marche en présence de la lame est égale à la différence de marche sans la lame soit $\frac{ax}{D}$ ajoutée de la différence de marche liée à la lame soit $ne - e$ (on ajoute une lame fictive d'épaisseur e et d'indice 1 devant S_1 et pendant que le rayon 2 parcourt la lame d'épaisseur e et d'indice n , le rayon parcourt la lame d'épaisseur e et d'indice 1).

$$\text{Soit } \delta'(M) = \frac{ax}{D} + (n-1)e.$$

La frange centrale d'ordre 0 se trouve en x_0 tel que $\frac{ax_0}{D} + (n-1)e = 0$ soit $x_0 = \frac{-(n-1)eD}{a} = -\frac{0,67 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 1,0}{300 \cdot 10^{-6}} = -1,5 \text{ cm} < 0$: la frange centrale se trouve maintenant en dessous de O , elle a translaté vers le bas d'une distance $d = \frac{(n-1)eD}{a} = 1,5 \text{ cm}$.

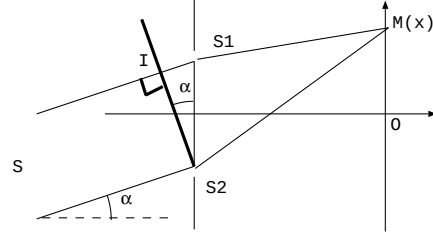
8. La figure d'interférences est inchangée, elle est juste translatée. La frange centrale monte car les rayons

parcourent une plus grande distance avant S_1 donc pour compenser ils doivent parcourir une distance plus courte après S_1 : la frange centrale se trouve au dessus de O .

La différence de marche s'écrit $\delta''_{2/1}(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (SS_2) + (S_2M) - (SI) - (IS_1) - (S_1M)$ avec $(S_2M) - (S_1M) = \frac{ax}{D}$ et $(SI) = (SS_2)$ car entre la source S et la surface d'onde S_2I le chemin optique est constant d'où $\delta''_{2/1}(M) = \frac{ax}{D} - (IS_1) = \frac{ax}{D} - IS_1$.

De plus $\sin \alpha = \frac{IS_1}{a} \approx \alpha$ soit $IS_1 = a\alpha$.

On a donc $\delta''_{2/1}(M) = \frac{ax}{D} - a\alpha$.



On cherche la position de la nouvelle frange centrale soit x_1 qui vérifie $\delta''(x_1) = 0 = \frac{ax_1}{D} - a\alpha$ soit $x_1 = D\alpha$.

9. On a $\overline{OA} = -x < 0$ et $\overline{OA'} = L - x$, on remplace dans la relation de conjugaison de Descartes: $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ qui donne $\frac{1}{L-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$ soit $\frac{L-x+x}{(L-x)x} = \frac{1}{f'}$ d'où à résoudre $x^2 - Lx + Lf' = 0$.

Le discriminant s'écrit $\Delta = L^2 - 4Lf'$ et les solutions sont $x_1 = \frac{L}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \frac{L}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$. La solution qui donne le plus grand grandissement est celle qui est la plus proche de la lentille soit x_2 car $x_2 < x_1$.

On a donc $\overline{OA} = -x_2 = -\frac{L}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -0,11 \text{ m}$ et $\overline{OA'} = L - x_2 = \frac{L}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 1,9 \text{ m}$.

On a donc $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{\frac{L}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}{\frac{L}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} = -17,3$.

On a donc $|\gamma| = \frac{a'}{a}$ soit $a = \frac{2,3}{17,3} = 135 \mu\text{m}$.

Remarque 1: en fait les deux positions x_1 et x_2 sont symétriques par rapport au milieu de AA' et on a $L - x_2 = x_1$ et $L - x_1 = x_2$.

Remarque 2: ici la distance objet écran est très grande devant la focale de la lentille donc l'image est quasiment à l'infini et l'objet est quasiment dans le plan focal objet de la lentille.